LII Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sprendimai

Romualdas Kašuba, Aivaras Novikas

IX - X klasės

1. Ratu bet kokia tvarka po vieną kartą surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2003. Du gretimus skaičius a ir b galima sukeisti vietomis, jei $a - b > 1$. Įrodykite, kad taip sukeičiant skaičius visada galima juos išdėstyti didėjimo tvarka.

Sprendimas. Skaičius rikiuosime didėjimo tvarka pagal laikrodžio rodyklę. Pradėkime nuo skaičiaus 1. Keiskime jį su gretimais pagal laikrodžio rodyklę skaičiais, kol greta vieneto pagal laikrodžio rodyklę neatsiras skaičius 2. Tada skaičių 2 keiskime su gretimais pagal laikrodžio rodyklę skaičiais, kol greta skaičiaus 2 neatsiras skaičius 3. Taip nekeisdami kitų skaičių tvarkos skaičių 2 pagal laikrodžio rodyklę tiesiog pastumiame, kol jis „neatsitrenkia" į skaičių 3. Skaičių 1 vėl galime, kaip darėme prieš tai, pastumti prie skaičiaus 2. Skaičiai 1, 2, 3 atsiduria greta, surikiuoti reikiama tvarka. Toliau 3 pastumiame prie 4, 2 prie 3, 1 prie 2 ir turime surikiuotus skaičius 1, 2, 3, 4. Toliau stumiame 4 prie 5, 3 prie 4, 2 prie 3, 1 prie 2, taip surikiuodami skaičius 1, 2, 3, 4, 5. Tęsdami šį procesą, pabaigoje didėjimo tvarka surikiuosime visus skaičius.

Pagrįskime, kad nurodytus veiksmus visada pavyks atlikti. Kiekvieną kartą atliekame tokią operaciją: tam tikrą skaičių k keičiame su gretimais pagal laikrodžio rodyklę, kol „atsitrenkiame" į skaičių $k+1$. Skaičiaus k negalima sukeisti tik su skaičiais $k-1$ ir $k+1$. Skaičius $k+1$ kelio nepastos, nes prie jo ir sustojame. Kai $k = 1$, skaičiaus $k - 1 = 0$ išvis nėra rate. Kai $k > 1$, skaičius $k-1$ operacijos pradžioje visada yra greta k prieš laikrodžio rodyklę dėl jau atlikto skaičių surikiavimo. Todėl eidami pagal laikrodžio rodyklę pirmiau sutinkame $k+1$, ties kuriuo ir sustojame, o ne $k-1$.

2. Nagrinėkime natūraliųjų skaičių ketvertus (a, b, c, d), tenkinančius sąlygas:

$$a + b + c + d = ab + cd, \quad a \leqslant b \leqslant c \leqslant d.$$

a) Raskite bent du tokius ketvertus.

b) Raskite visus tokius ketvertus.

Sprendimas. a) Imdami $a = b = c = d$, gauname $4a = 2a^2$. Tada $a = 0$ (netinka) arba $a = 2$. Turime ketvertą $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$.

Toliau imdami $a = b = 1$, gauname $2 + c + d = 1 + cd$ arba $cd - c - d - 1 = 0$. Pastaroji lygybė ekvivalenti $(c-1)(d-1) = 2$ ir (kadangi $1 \leqslant c \leqslant d$) turime $c - 1 = 1$, $d - 1 = 2$. Gavome dar vieną ketvertą $(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 3)$.

b) Bendrame sprendime atlikime tokį „dvigubą” reiškinio $xy-x-y$ vertimą sandauga, pridėdami prie jo 1:

$$xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1).$$

Mūsų atveju

$$(ab - a - b) + (cd - c - d) = 0,$$

$$(ab - a - b + 1) + (cd - c - d + 1) = 2,$$

$$(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2.$$

Nežinomieji surikiuoti didėjimo tvarka ir tai palengvina perranką.

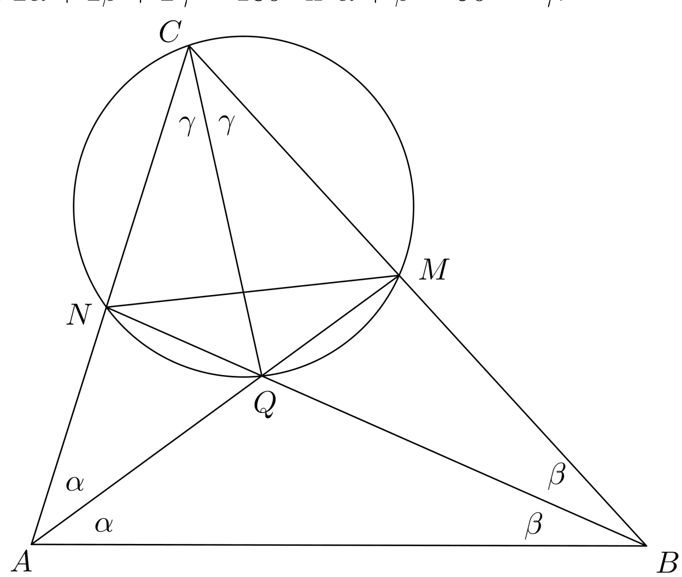
Tarkime, kad $a - 1 = 0$. Tada $(c-1)(d-1) = 2$ ir (kadangi $1 \leqslant c \leqslant d$) turime $c-1 = 1$, $d-1 = 2$, o $b-1$ reikšmę esame laisvi pasirinkti tarp $a-1$ ir $c-1$. Gauname du ketvertus $(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 3)$ (jau turėjome) ir $(a, b, c, d) = (1, 2, 2, 3)$.

Tarkime, kad $a-1 \neq 0$. Tada $a-1 \geqslant 1$. Kiti trys skaičiai $b-1$, $c-1$, $d-1$ ne mažesni. Jei bent vienas iš jų didesnis už 1, tai $(a-1)(b-1)+(c-1)(d-1) > 1\cdot 1+1\cdot 1 = 2$. Taigi $a-1 = b-1 = c-1 = d-1 = 1$ ir gauname jau rastą ketvertą $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$.

Ats.: (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3), (2, 2, 2, 2).

3. Trikampio ABC pusiaukampinės AM ir BN susikerta taške Q. Apie trikampį MQN apibrėžtas apskritimas eina per tašką C. Raskite trikampio QMN kampus.

Sprendimas. Trikampio ABC kampus A, B, C atitinkamai pažymėkime 2α, 2β ir 2γ. Tada $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ ir $\alpha + \beta = 90° - \gamma$.



Trikampyje ABQ turime

$$\angle BAQ = \angle BAC/2 = \alpha, \quad \angle ABQ = \angle ABC/2 = \beta,$$

$$\angle AQB = 180° - \angle BAQ - \angle ABQ = 180° - \alpha - \beta = 180° - (90° - \gamma) = 90° + \gamma.$$

Kadangi keturkampis $CMQN$ yra įbrėžtas į apskritimą, tai jo priešingų kampų suma yra lygi

$$180° = \angle MQN + \angle MCN = \angle AQB + \angle ACB = (90° + \gamma) + 2\gamma = 90° + 3\gamma.$$

Todėl $\gamma = 30°$ ir $\angle MQN = 90° + \gamma = 120°$.

Pastebėkime, kad atkarpa CQ eina per pusiaukampinių susikirtimo tašką Q, todėl pati yra pusiaukampinė. Taigi $\angle NCQ = \angle MCQ = \angle ACB/2 = \gamma = 30°$. Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į vieną apskritimo lanką, lygūs:

$$\angle NMQ = \angle NCQ = 30°, \quad \angle MNQ = \angle MCQ = 30°.$$

Ats.: $\angle MQN = 120°$, $\angle NMQ = 30°$, $\angle MNQ = 30°$.

4. Egzaminą raštu laiko 67 studentai. Užduotį sudaro 6 klausimai. Už teisingą atsakymą į pirmą klausimą studentas gauna 1 tašką, priešingu atveju gauna -1 tašką, už antrą klausimą – atitinkamai 2 arba -2 taškus ir t. t., už šeštą – atitinkamai 6 arba -6 taškus.

a) Raskite mažiausią galimą teigiamą skirtumą tarp dviejų studentų surinktų balų sumų.
b) Įrodykite, kad bent keturi studentai surinks vienodą balų sumą.
c) Įrodykite, kad bent du studentai gaus visiškai vienodus įvertinimus už kiekvieną klausimą.

Sprendimas. a) Ieškomas skirtumas yra natūralusis skaičius. Lengva gauti sumų skirtumą

$$2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (-1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6).$$

Bet gal įmanoma gauti dar mažesnį skirtumą 1?

Kiekvieno studento balų suma gali būti užrašyta kaip $(\pm 1) + (\pm 2) + (\pm 3) + (\pm 4) + (\pm 5) + (\pm 6)$. Kad ir kaip beparinktume ženklus, turime trijų lyginių ir trijų nelyginių skaičių sumą, kuri visada yra nelyginė. Mažiausias teigiamas skirtumas tarp nelyginių skaičių yra 2 (kai turime gretimus nelyginius skaičius). Todėl sumų skirtumas negali būti 1.

b) Nustatykime, kokias apskritai reikšmes gali įgyti studento balų suma. Didžiausia galima suma yra $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, o mažiausia galima suma yra $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 = -21$. a) dalyje jau įrodėme, kad suma turi būti nelyginis skaičius. Taigi suma gali būti lygi tik vienam iš $2 \cdot 11 = 22$ skaičių ± 1, ± 3, ± 5, $\ldots$, ± 21.

Toliau taikome Dirichlė principą. Jei kiekvieną iš 22 galimų balų sumų surinktų daugiausiai po 3 studentus, tai tų studentų būtų daugiausiai $22 \cdot 3 = 66$. Egzaminą laiko 67 studentai, daugiau nei 66, todėl vieną iš sumų surinko bent 4 studentai.

c) Nustatykime, kiek iš viso yra galimų įvertinimų rinkinių $(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6)$. Kiekvieno klausimo įvertinimui yra po 2 galimybes, tad iš viso turime $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ galimybes, kokius įvertinimus gali gauti studentas.

Kaip ir b) dalyje, pritaikysime Dirichlė principą. Jei kiekvieną įvertinimų rinkinį gautų po daugiausiai vieną studentą, tai studentų būtų daugiausiai tiek, kiek yra rinkinių, t. y. 64. Egzaminą laiko 67 studentai, daugiau nei 64, todėl vieną iš įvertinimų rinkinių gavo bent 2 studentai.

Ats.: a) 2.

XI - XII klasės

1. Natūralusis skaičius n yra toks, kad skaičiai $2n + 1$ ir $3n + 1$ yra sveikųjų skaičių kvadratai.

a) Įrodykite, kad n dalijasi iš 8.

b) Ar būtinai n dalijasi iš 16?

Sprendimas. a) Pažymėkime $k = \sqrt{2n+1}$. Tada $2n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$. Kadangi $k^2 = 2n + 1$ yra nelyginis skaičius, tai ir pats skaičius k nelyginis. Todėl lyginiai yra abu skaičiai $k - 1$ ir $k + 1$. Kiekvienas iš jų dalijasi iš 2, tad jų sandauga $2n$ dalijasi iš 4. Tai įrodo, kad skaičius n dalijasi iš 2.

Kadangi skaičius n lyginis, tai skaičius $3n + 1$ yra nelyginis. Todėl nelyginis skaičius yra ir $\sqrt{3n+1}$. Pažymėkime $2l + 1 = \sqrt{3n+1}$. Tada $3n = (2l + 1)^2 - 1 = 4l^2 + 4l = 4l(l+1)$. Vienas iš skaičių l ir $l+1$ yra lyginis, todėl $l(l+1)$ dalijasi iš 2, o $3n = 4l(l+1)$ dalijasi jau iš $4 \cdot 2 = 8$. Tai įrodo, kad skaičius n dalijasi iš 8.

b) Galima nujausti, kad atsakymas neigiamas. Žinome, kad n dalijasi iš 8, tad ir ieškokime kontrpavyzdžio, imdami $n = 8, 16, 24, 32, \ldots$. Jau penktas skaičius $n = 40$ yra toks kontrpavyzdys, nes $2 \cdot 40 + 1 = 9^2$, $3 \cdot 40 + 1 = 11^2$ ir 40 nesidalija iš 16.

Ats.: b) ne, nebūtinai.

2. Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1^2 + \dfrac{1}{x_2^2} = 4, \\ x_2^2 + \dfrac{1}{x_3^2} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2n-1}^2 + \dfrac{1}{x_{2n}^2} = 4, \\ x_{2n}^2 + \dfrac{1}{x_1^2} = 1. \end{cases}$$

a) Tegul $n = 2$. Raskite bent 3 sistemos sprendinius.

b) Tegul $n = 2$. Raskite visus sprendinius.

c) Išspręskite sistemą su kiekvienu natūraliuoju n.

Sprendimas. a) Sistemą sudaro lygtys

$$x_1^2 + \frac{1}{x_2^2} = 4, \quad x_2^2 + \frac{1}{x_3^2} = 1, \quad x_3^2 + \frac{1}{x_4^2} = 4, \quad x_4^2 + \frac{1}{x_1^2} = 1.$$

Pastebėjus dėsningumus, galima atspėti, kad sistema tenkinama, jei tik $x_1^2 = x_2^{-2} = x_3^2 = x_4^{-2} = 2$. Taip iš karto randame ne 3, bet 16 sprendinių $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ (čia kiekvienas iš ženklų gali būti bet koks).

b) Įrodysime, kad kitų sprendinių, be rastųjų a) dalyje, nėra. Kadangi visi nežinomieji yra vardikliuose, tai nė vienas iš jų nėra lygus 0. Kairiosioms pusėms pritaikykime aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę:

$$4 = x_1^2 + \frac{1}{x_2^2} \geqslant 2\sqrt{x_1^2 \cdot \frac{1}{x_2^2}} = 2\left|\frac{x_1}{x_2}\right|.$$

Panašiai

$$1 \geqslant 2\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \quad 4 \geqslant 2\left|\frac{x_3}{x_4}\right|, \quad 1 \geqslant 2\left|\frac{x_4}{x_1}\right|.$$

Pastebėkime, kad sudauginus nelygybes, nežinomieji susiprastina:

$$16 = 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \geqslant 2\left|\frac{x_1}{x_2}\right| \cdot 2\left|\frac{x_2}{x_3}\right| \cdot 2\left|\frac{x_3}{x_4}\right| \cdot 2\left|\frac{x_4}{x_1}\right| = 16\left|\frac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}\right| = 16.$$

Pati nelygybė $16 \geqslant 16$, žinoma, nelabai naudinga. Bet jei bent viena iš pradinių nelygybių būtų griežta, tai (turint omeny ir tai, kad dešiniosios nelygybių pusės nelygios 0) gautume, kad $16 > 16$. Taip nelygybės virsta lygybėmis:

$$4 = 2\left|\frac{x_1}{x_2}\right|, \quad 1 = 2\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \quad 4 = 2\left|\frac{x_3}{x_4}\right|, \quad 1 = 2\left|\frac{x_4}{x_1}\right|$$

ir

$$|x_1| = 2|x_2| = |x_3| = 2|x_4|.$$

Pažymėkime $a = x_2^2 > 0$. Tada $x_1^2 = 4x_2^2 = 4a$. Įrašykime šias išraiškas į pirmąją pradinės sistemos lygtį:

$$4a + \frac{1}{a} = 4, \quad 4a^2 - 4a + 1 = 0, \quad (2a-1)^2 = 0, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Taip gauname $x_2^{-2} = x_4^{-2} = a^{-1} = 2$ ir $x_1^2 = x_3^2 = 4a = 2$. O iš šių lygybių gauname tuos sprendinius, kuriuos jau nurodėme a) dalyje.

Lygčių sistemą galima išspręsti ir kiek kitaip. Atimkime iš pirmosios lygties trečiąją, o iš antrosios ketvirtąją. Pertvarkę gautąsias lygtis turime

$$x_1^2 - x_3^2 = \frac{x_2^2 - x_4^2}{x_2^2 x_4^2}, \quad x_2^2 - x_4^2 = -\frac{x_1^2 - x_3^2}{x_1^2 x_3^2}.$$

Jei $|x_1| \neq |x_3|$, tai $|x_2| \neq |x_4|$, ir atvirkščiai. Tada sudauginę gautąsias lygtis ir padaliję jas iš kvadratų skirtumų gautume, kad $0 \leqslant x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = -1 < 0$, t. y. prieštarą.

Taigi $|x_1| = |x_3|$ ir $|x_2| = |x_4|$. Dabar iš pirmųjų dviejų lygčių galima eliminuoti x_2^2, gauti bikvadratinę lygtį x_1 atžvilgiu, tada rasti x_1 ir likusius nežinomuosius.

c) Kaip ir b) dalyje taikykime aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybes lygčių kairiosioms pusėms:

$$4 \geqslant 2\left|\frac{x_1}{x_2}\right|, \quad 1 \geqslant 2\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \quad \ldots, \quad 4 \geqslant 2\left|\frac{x_{2n-1}}{x_{2n}}\right|, \quad 1 \geqslant 2\left|\frac{x_{2n}}{x_1}\right|.$$

Vėl sudauginkime nelygybes. Turime $2n$ nelygybių, pusėje iš jų kairėje yra 4 ir pusėje 1, o dešinėje nežinomieji susiprastina:

$$2^{2n} = 4^n \cdot 1^n \geqslant 2^{2n}\left|\frac{x_1 x_2 \ldots x_{2n}}{x_1 x_2 \ldots x_{2n}}\right| = 2^{2n}.$$

Jei bent viena iš pradinių nelygybių būtų griežta, tai gautume $2^{2n} > 2^{2n}$. Todėl visos nelygybės virsta lygybėmis:

$$4 = 2\left|\frac{x_1}{x_2}\right|, \quad 1 = 2\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \quad \ldots, \quad 4 = 2\left|\frac{x_{2n-1}}{x_{2n}}\right|, \quad 1 = 2\left|\frac{x_{2n}}{x_1}\right|$$

ir

$$|x_1| = 2|x_2| = |x_3| = 2|x_4| = \ldots = |x_{2n-1}| = 2|x_{2n}|.$$

Pažymėkime $a = x_2^2 > 0$. Tada $x_1^2 = 4x_2^2 = 4a$. Kaip ir b) dalyje, iš sistemos pirmosios lygties randame $a = \frac{1}{2}$. Tada

$$2 = 4a = x_1^2 = x_3^3 = \ldots = x_{2n-1}^2, \quad \frac{1}{2} = x_2^2 = x_4^2 = \ldots = x_{2n}^2.$$

Sistemos sprendinys privalo turėti pavidalą

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

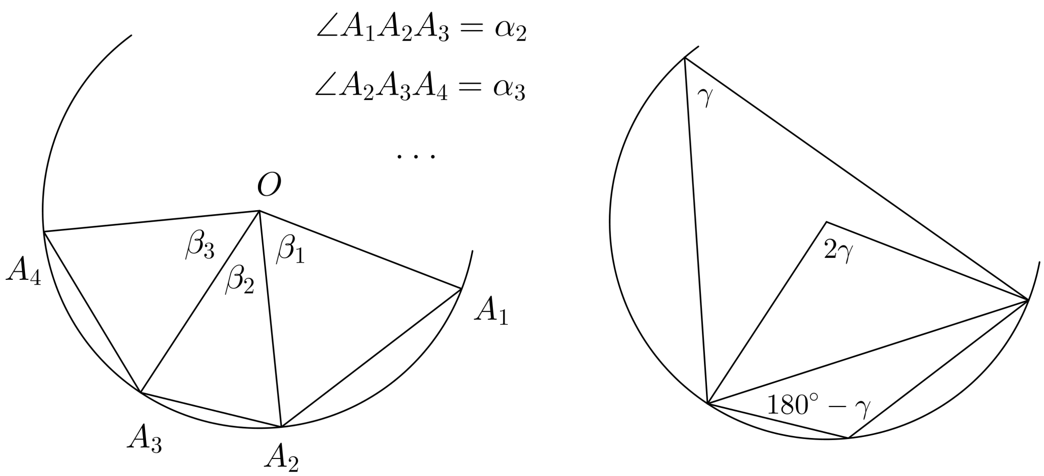
Čia kiekvienas iš ženklų gali būti bet koks. Iš tiesų nuo ženklų parinkimo nepriklauso reikšmės $x_1^2 = 2$, $x_2^2 = \frac{1}{2}$ ir t. t. Su šiomis reikšmėmis visos pradinės lygtys virsta teisingomis lygybėmis $2 + 2 = 4$ bei $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Ats.: a) ir b) $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$; c) $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3. Į apskritimą įbrėžto iškilojo septynkampio trys kampai lygūs $120°$. Įrodykite, kad mažiausiai dviejų jo kraštinių ilgiai lygūs.

Sprendimas. Septynkampio viršūnes iš eilės pažymėkime A_1, A_2, …, A_7, o atitinkamus septynkampio kampus pažymėkime α_1, α_2, …, α_7. Trys iš jų lygūs $120°$. Apibrėžtojo apskritimo centrą pažymėkime O. Pažymėkime centrinius kampus $\beta_1 = \angle A_1OA_2$, $\beta_2 = \angle A_2OA_3$, …, $\beta_7 = \angle A_7OA_1$. Kartu šie centriniai kampai sudaro pilnąjį $360°$ kampą.

Septynkampio kraštinės yra apskritimo stygos. Apskritimo stygos lygios, kai į jas besiremiantys centriniai kampai lygūs. Taigi reikia įrodyti, kad du iš 7 kampų β_1, …, β_7 lygūs.



Jei kuris nors centrinis kampas lygus 2γ, tai įbrėžtinis kampas yra perpus mažesnis, kai kampų viršūnės yra vienoje pusėje nuo stygos, į kurią jie remiasi, ir lygus $180° - \gamma$ priešingu atveju (žr. pav.). Todėl jei $2\gamma = \angle A_1OA_3 = \beta_1 + \beta_2$, tai $\angle A_1A_2A_3 = \alpha_2 = 180° - \gamma$ ir $\beta_1 + \beta_2 = 2(180° - \alpha_2) = 360° - 2\alpha_2$. Analogiškai $\beta_2 + \beta_3 = 360° - 2\alpha_3$, …, $\beta_7 + \beta_1 = 360° - 2\alpha_1$. Kadangi trys iš kampų α_i lygūs $120°$, tai trys iš 7 kampų

$$\beta_1 + \beta_2, \quad \beta_2 + \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_7 + \beta_1$$

lygūs

$$360° - 2 \cdot 120° = 120°.$$

Kiekvienas iš tų trijų kampų yra dviejų dėmenų β_i suma. Per tris sumas turime 6 tokius dėmenis.

Jei visi dėmenys skirtingi, tai jų visų suma lygi

$$3 \cdot 120^\circ = 360^\circ < \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_7 = 360^\circ.$$

Gauname prieštarą.

Taigi trijose sumose du dėmenys sutampa. Jei tie dėmenys lygūs, pavyzdžiui, β_1, tai turime dvi sumas

$$\beta_7 + \beta_1 = \beta_1 + \beta_2 = 120^\circ.$$

Tada gauname, kad $\beta_7 = \beta_2$ ir $A_7A_1 = A_2A_3$. Analogiškai jei tie dėmenys lygūs β_2, tai $\beta_1 = \beta_3$ ir $A_1A_2 = A_3A_4$, ir t. t. Ratu apeidami septynkampį, kiekvienu atveju (pasikartojantis dėmuo β_i) gauname tą pačią situaciją su dviem lygiais centriniais kampais (kuriuos ir skiria vienas kampas, lygus β_i). Kiekvienu atveju dvi septynkampio kraštinės lygios.

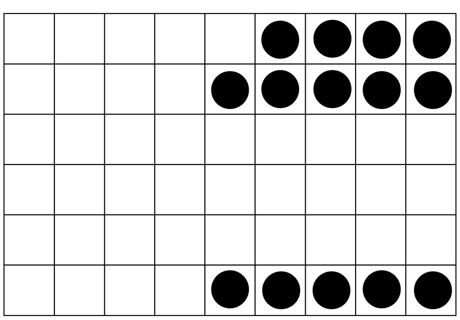
4. Stačiakampė lenta 6×9 sudaryta iš 54 vienetinių kvadratėlių. Į kai kuriuos jos langelius galima padėti po vieną šaškę.

a) Ar galima taip padėti šaškes, kad bet kuriuose dviejuose kvadratuose 4×4 šaškių skaičius būtų skirtingas?

b) Ar galima taip padėti šaškes, kad bet kuriuose dviejuose kvadratuose 5×5 šaškių skaičius būtų skirtingas?

Sprendimas. a) Kairysis viršutinis 4×4 kvadrato langelis gali būti vienoje iš 3 viršutinių eilučių ir viename iš 6 kairiųjų stulpelių (kitaip kvadrato apatinis arba dešinysis kraštas netilptų lentelėje). Turime $3 \cdot 6 = 18$ kvadratų. Tačiau šaškių skaičius bet kuriame iš jų tegali būti vienas iš 17 skaičių 0, 1, 2, …, 16. Taigi daugiausiai 17-oje kvadratų šaškių skaičius gali būti skirtingas, o tarp 18 kvadratų atsiras du, kuriuose šaškių bus po lygiai.

b) Šaškes galima padėti, pavyzdžiui, taip, kaip parodyta paveikslėlyje.



Kairysis viršutinis 5×5 kvadrato langelis gali būti vienoje iš 2 viršutinių eilučių ir viename iš 5 kairiųjų stulpelių. Turime $2 \cdot 5 = 10$ kvadratų, kuriuose šiuo atveju bus po 1, 2, …, 10 šaškių.

Ats.: a) negalima; b) galima.