LII Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kėdainiai, 2003 m. balandžio 15 d.

IX - X klasės

1. Ratu bet kokia tvarka po vieną kartą surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2003. Du gretimus skaičius a ir b galima sukeisti vietomis, jei $a - b > 1$. Įrodykite, kad taip sukeičiant skaičius visada galima juos išdėstyti didėjimo tvarka.

2. Nagrinėkime natūraliųjų skaičių ketvertus (a, b, c, d), tenkinančius sąlygas:

$$a + b + c + d = ab + cd, \quad a \leqslant b \leqslant c \leqslant d.$$

a) Raskite bent du tokius ketvertus.
b) Raskite visus tokius ketvertus.

3. Trikampio ABC pusiaukampinės AM ir BN susikerta taške Q. Apie trikampį MQN apibrėžtas apskritimas eina per tašką C. Raskite trikampio QMN kampus.

4. Egzaminą raštu laiko 67 studentai. Užduotį sudaro 6 klausimai. Už teisingą atsakymą į pirmą klausimą studentas gauna 1 tašką, priešingu atveju gauna -1 tašką, už antrą klausimą – atitinkamai 2 arba -2 taškus ir t. t., už šeštą – atitinkamai 6 arba -6 taškus.

a) Raskite mažiausią galimą teigiamą skirtumą tarp dviejų studentų surinktų balų sumų.
b) Įrodykite, kad bent keturi studentai surinks vienodą balų sumą.
c) Įrodykite, kad bent du studentai gaus visiškai vienodus įvertinimus už kiekvieną klausimą.

LII Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kėdainiai, 2003 m. balandžio 15 d.

XI - XII klasės

1. Natūralusis skaičius n yra toks, kad skaičiai $2n+1$ ir $3n+1$ yra sveikųjų skaičių kvadratai.

a) Įrodykite, kad n dalijasi iš 8.

b) Ar būtinai n dalijasi iš 16?

2. Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1^2 + \dfrac{1}{x_2^2} = 4, \\ x_2^2 + \dfrac{1}{x_3^2} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{2n-1}^2 + \dfrac{1}{x_{2n}^2} = 4, \\ x_{2n}^2 + \dfrac{1}{x_1^2} = 1. \end{cases}$$

a) Tegul $n = 2$. Raskite bent 3 sistemos sprendinius.

b) Tegul $n = 2$. Raskite visus sprendinius.

c) Išspręskite sistemą su kiekvienu natūraliuoju n.

3. Į apskritimą įbrėžto iškilojo septynkampio trys kampai lygūs $120°$. Įrodykite, kad mažiausiai dviejų jo kraštinių ilgiai lygūs.

4. Stačiakampė lenta 6×9 sudaryta iš 54 vienetinių kvadratėlių. Į kai kuriuos jos langelius galima padėti po vieną šaškę.

a) Ar galima taip padėti šaškes, kad bet kuriuose dviejuose kvadratuose 4×4 šaškių skaičius būtų skirtingas?

b) Ar galima taip padėti šaškes, kad bet kuriuose dviejuose kvadratuose 5×5 šaškių skaičius būtų skirtingas?