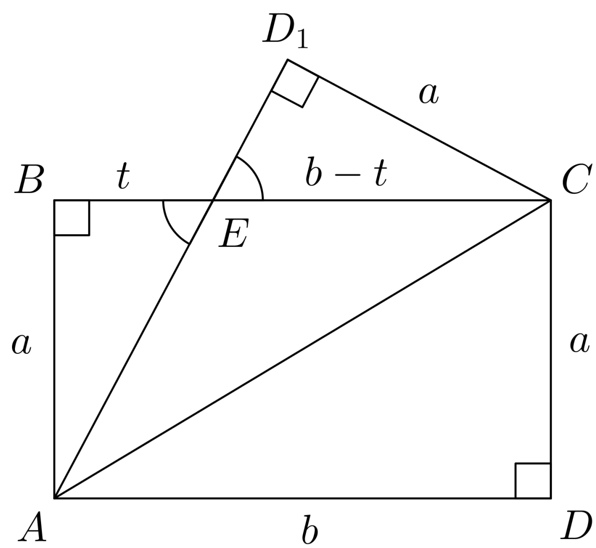
LIII Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sprendimai

Romualdas Kašuba, Aivaras Novikas

IX - X klasės

1. Stačiakampio formos popieriaus lapas $ABCD$ sulenkiamas per įstrižainę AC. Kraštinė AD naujoje padėtyje kerta kraštinę BC taške E. Raskite santykį $BE : EC$, jei $AB = a$, $AD = b$, $b > a$.

Sprendimas. Tašką, kuriame atsiduria viršūnė D sulenkus lapą, pažymėkime D_1. Trikampis AD_1C yra simetriškas trikampiui ADC įstrižainės AC atžvilgiu (žr. pav.).



Lengva pastebėti trikampių ABE ir CD_1E simetriškumą. Jie yra panašūs, nes turi po statųjį kampą ir $\angle AEB = \angle CED_1$ (kryžminiai kampai). Prieš lygius kampus ir kraštinės lygios: $AB = CD_1 = a$, tad šie trikampiai lygūs.

Pažymėkime $BE = t$. Tada $AE = EC = b - t$. Pagal Pitagoro teoremą trikampiui ABE gauname

$$a^2 + t^2 = (b-t)^2 = b^2 - 2bt + t^2,$$

$$2bt = b^2 - a^2, \quad 2b(b-t) = 2b^2 - 2bt = b^2 + a^2,$$

$$BE : EC = \frac{t}{b-t} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

Ats.: $\dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$.

2. Tomas ir Romas žaidžia tokį žaidimą. Žaidėjai pakaitomis (pradeda Tomas) deda monetas į kvadratinės lentos 20×20 laukelius. Vienu ėjimu leidžiama padėti monetą į tuščią laukelį. Žaidėjas laimi, jei po jo ėjimo galima rasti keturias monetas, kurios būtų viršūnės stačiakampio su kraštinėmis, lygiagrečiomis lentos kraštams.

Kuris iš žaidėjų ir kaip žaisdamas visada gali laimėti?

Sprendimas. Padalykime lentą į 10 juostų po 2 eilutes, o kiekvieną iš juostų – į 20 vertikalių 2×1 stačiakampių.

Romas visada gali laimėti, žaisdamas tokiu būdu. Kur Tomas bepadėtų monetą, Romas padeda monetą į antrąjį to paties 2×1 stačiakampio langelį. Taip po abiejų žaidėjų ėjimų bus dviem monetomis vis uždengiama po tokį stačiakampį.

Norint laimėti reikia, kad dviejose eilutėse atsirastų po dvi monetas (ir ne bet kaip padėtas). Todėl kol Tomas dės monetas į skirtingas juostas, tol tikrai negalės laimėti: visos monetos (tiek Tomo, tiek Romo) bus skirtingose eilutėse. Kai Tomas pirmą kartą (vėliausiai po 10 savo ėjimų) padės antrą monetą į tą pačią juostą, jis šiuo ėjimu taip pat nelaimės: vienoje eilutėje atsiras dvi monetos, bet kitose liks daugiausiai po vieną. O Romas tolimesniu ėjimu laimės: po jo ėjimo vienoje juostoje du 2×1 stačiakampiai bus uždengti 4 monetų, jų uždengti laukeliai bus stačiakampio viršūnės.

Ats.: Romas visada gali laimėti.

3. Įrodykite nelygybę

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

jei a, b ir c – teigiamieji skaičiai.

Sprendimas. Įrodymas telpa vienoje eilutėje. Tereikia kairėje atpažinti dėmenis, sutampančius su dauginamaisiais dešinėje, ir pritaikyti jiems aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$:

$$(a+b)(a+c) = a^2+ab+ac+bc = a(a+b+c)+bc \geqslant 2\sqrt{a(a+b+c)\cdot bc} = 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

4. Teigiamųjų skaičių x, y, z sandauga lygi 1. Įrodykite, kad tada

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

Sprendimas. Sprendime esama pusantros gudrybės. Viena gudrybė – pakeisti vienos iš trupmenų skaitiklį ir vardiklį taip, kad vardiklyje atsirastų sandauga $xyz = 1$:

$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{1+x+xy}.$$

Vardiklis sutapo su pirmosios trupmenos vardikliu.

O štai dar pusė gudrybės – analogiškai pakeisti trečiosios trupmenos vardiklį, bet jau ne vieną kartą, bet du, kad visi trys vardikliai sutaptų:

$$\frac{1}{1+z+zx}=\frac{y}{y+yz+yzx}=\frac{y}{1+y+yz}=\frac{xy}{x+xy+xyz}=\frac{xy}{1+x+xy}.$$

Pagaliau sudėkime subendravardiklintas trupmenas:

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$

$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1.$$

XI - XII klasės

1. Kvadratinės lentelės $n\times n$ kiekviename langelyje įrašomas 1 arba -1. Tegul a_i yra i-tojoje eilutėje esančių skaičių sandauga, o b_j yra j-tajame stulpelyje esančių skaičių sandauga.

Ar galima taip užpildyti lentelę, kad suma

$$a_1+a_2+\ldots+a_i+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_j+\ldots+b_n$$

būtų lygi nuliui, kai

a) $n=10$;

b) $n=9$?

Sprendimas. a) Vienos iš didžiųjų įstrižainių 5 langeliuose įrašykime po skaičių -1. Kitur įrašykime vienetus. Tada 5 eilutėse yra po vieną skaičių -1, jose esančių skaičių sandaugos lygios $1^9\cdot(-1)=-1$. Likusiose 5 eilutėse nėra nė vieno skaičiaus -1, jose esančių skaičių sandaugos lygios $1^{10}=1$. Todėl

$$a_1+a_2+\ldots+a_{10}=5\cdot(-1)+5\cdot 1=0.$$

Analogiškai

$$b_1+b_2+\ldots+b_{10}=5\cdot(-1)+5\cdot 1=0.$$

Tada ir bendra suma lygi 0.

Kitas būdas užpildyti lentelę toks: 5 eilutėse visur įrašome skaičių -1, kitose 5 eilutėse – visur skaičių 1. Tada eilutėse yra po 0 arba 10 skaičių -1, tad visos jų skaičių sandaugos lygios 1. Stulpeliuose yra po 5 skaičius -1, tad visos jų skaičių sandaugos lygios -1. Sandaugų suma lygi $10\cdot 1+10\cdot(-1)=0$.

b) Tarkime, kad $a_1+a_2+\ldots+a_9+b_1+b_2+\ldots+b_9=0$. Visų lentelės langeliuose įrašytų skaičių sandauga lygi $a_1a_2\ldots a_9=b_1b_2\ldots b_9=\pm 1$. Todėl visų 18 pažymėtųjų sandaugų sandauga lygi $a_1 a_2 \dots a_9 b_1 b_2 \dots b_9 = (\pm 1)^2 = 1$. Kad ši sandauga būtų teigiamas skaičius, neigiamų dauginamųjų skaičius joje turi būti lyginis, t. y. tarp 18 skaičių $a_1, \dots, b_9$ lygių -1 yra lyginis skaičius $2k$, $k = 0, 1, \dots, 9$. Likę $18 - 2k$ skaičių lygūs 1. 18 pažymėtųjų skaičių suma lygi

$$0 = a_1 + \dots + b_9 = 2k \cdot (-1) + (18 - 2k) \cdot 1 = 18 - 4k.$$

Bet tada $k = 4{,}5$ nėra sveikasis skaičius. Gavome prieštarą. Vadinasi, kai $n = 9$, lentelės užpildyti norimu būdu negalima.

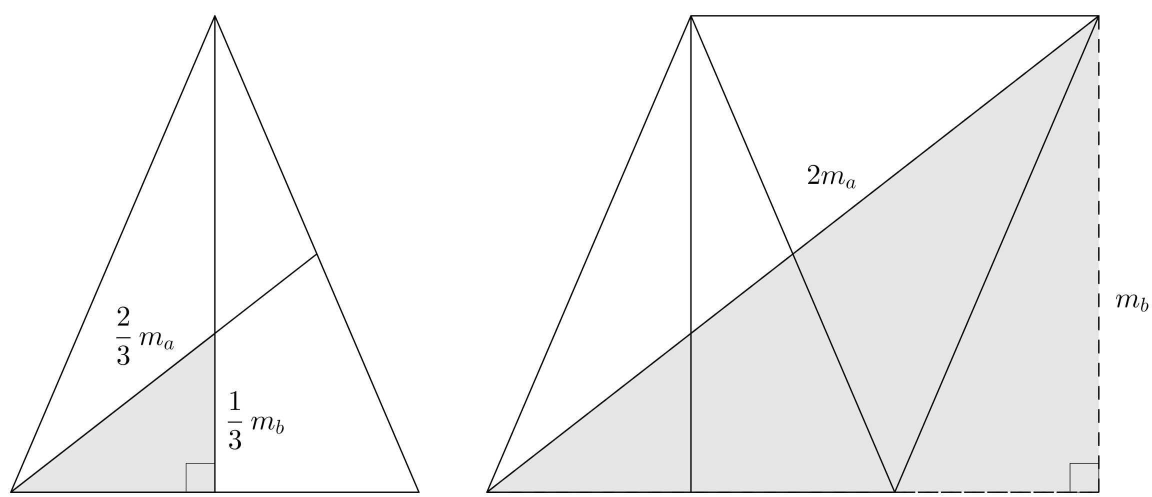
Ats.: a) galima; b) negalima.

2. Lygiašonio trikampio dviejų pusiaukraštinių ilgiai yra $\sqrt{1 - 2^{-2004}}$ ir $2 - 2^{-2004}$. Raskite trečios pusiaukraštinės ilgį.

Sprendimas. Kadangi trikampis lygiašonis, tai jis turi simetrijos ašį ir dvi jo pusiaukraštinės, nuleistos į šonines kraštines, yra vienodo ilgio. Duotieji ilgiai nėra lygūs ($2 - 2^{-2004} > 2 - 1 = 1 > \sqrt{1 - 2^{-2004}}$), tad trečiosios pusiaukraštinės ilgis ir yra $\sqrt{1 - 2^{-2004}}$ arba $2 - 2^{-2004}$.

Reikia atmesti vieną iš dviejų galimybių. Pažymėkime $m_a = \sqrt{1 - 2^{-2004}}$ ir $m_b = 2 - 2^{-2004}$.

Tarkime, kad pusiaukraštinė m_b nuleista į pagrindą. Tada ji sutampa su lygiašonio trikampio aukštine ir yra statmena pagrindui. Pusiaukraštinės dalija viena kitą santykiu 2 : 1, t. y. dalija į atkarpas kurių ilgiai yra $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{1}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_b$.



Kairiajame paveikslėlyje turime statųjį trikampį, kurio vienas statinis yra $\frac{1}{3}m_b$, o įžambinė yra $\frac{2}{3}m_a$. Įžambinė ilgesnė už statinį:

$$\frac{2}{3}m_a > \frac{1}{3}m_b, \qquad 2m_a > m_b.$$

Gautąją nelygybę nesunku pastebėti ir papildžius brėžinį iki lygiagretainio, kaip parodyta dešiniajame paveikslėlyje.

Tačiau

$$(2m_a)^2 = 4m_a^2 = 4(1 - 2^{-2004}) = 4 - 2^{-2002}$$

ir

$$m_b^2 = (2-2^{-2004})^2 = 4-2\cdot 2\cdot 2^{-2004}+2^{-4008} = 4-2^{-2002}+2^{-4008} > 4-2^{-2002} = (2m_a)^2.$$

Taigi $m_b > 2m_a$. Gavome prieštarą.

Vadinasi, pusiaukraštinė m_b nuleista į šoninę kraštinę, o m_a yra nuleista į pagrindą. Tada trečiosios pusiaukraštinės, nuleistos į šoninę kraštinę, ilgis yra $m_b = 2 - 2^{-2004}$

Ats.: $2 - 2^{-2004}$.

3. Begalinė realiųjų skaičių seka a_n $(n \in \mathbb{N})$ tenkina sąlygą

$$a_{k^2+m^2} = a_k^2 + a_m^2 \quad (k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N})$$

(todėl, pavyzdžiui, $a_{10} = a_{1^2+3^2} = a_1^2 + a_3^2$).

Gali ar negali pirmas tokios sekos narys a_1 būti lygus skaičiui:

a) 0; b) 1; c) -1; d) $1/3$; e) $-1/3$?

Sprendimas. a), b) ir c) dalyse reikia tik atspėti tinkamą seką.

a) Uždavinio sąlygą tenkina seka

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

nes $0 = 0^2 + 0^2$. Tada $a_1 = 0$.

b) Uždavinio sąlygą tenkina seka

$$a_n = n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

nes tada bet kurioms k ir m reikšmėms galioja $a_{k^2+m^2} = k^2 + m^2$ ir $a_k^2 + a_m^2 = k^2 + m^2$. Turime $a_1 = 1$.

c) Pakeiskime b) dalies sekoje tik vieną sekos narį:

$$a_1 = -1, \quad a_n = n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Bet kuriems natūraliesiems k ir m turime $k^2 + m^2 \geqslant 1^2 + 1^2 > 1$. Todėl sąlygoje sekos narys $a_{k^2+m^2}$ nėra ypatingasis narys a_1 ir jam galioja lygybė $a_{k^2+m^2} = k^2 + m^2$. Tiek $n = 1$, tiek didesnėms n reikšmėms turime $a_n = \pm n$, todėl bet kurioms k ir m reikšmėms $a_k^2 + a_m^2 = (\pm k)^2 + (\pm m)^2 = k^2 + m^2 = a_{k^2+m^2}$. T. y. uždavinio sąlyga galioja. Gavome seką su $a_1 = -1$.

d) ir e) Tarkime, kad $a_1 = \pm 1/3$. Tada $a_1^2 = 1/9$ ir

$$a_2 = a_{1^2+1^2} = a_1^2 + a_1^2 = \frac{2}{9},$$

$$a_5 = a_{2^2+1^2} = a_2^2 + a_1^2 = \frac{13}{81},$$

$$a_{50} = a_{5^2+5^2} = a_5^2 + a_5^2 = 2a_5^2 = 2 \cdot \frac{13^2}{81^2}.$$

Galime gauti daugiau įvairių sekos narių, tačiau narys a_{50} yra ypatingas tuo, kad skaičius 50 gali būti ir kitaip užrašytas kaip dviejų kvadratų suma: ne tik $50 = 5^2 + 5^2$, bet ir $50 = 7^2 + 1^2$. Tai leidžia mums gauti a_7^2 reikšmę ne kaip dviejų teigiamų skaičių sumą, bet kaip skirtumą:

$$2 \cdot \frac{13^2}{81^2} = a_{50} = a_{7^2+1^2} = a_7^2 + a_1^2 = a_7^2 + \frac{1}{9},$$

$$a_7^2 = 2 \cdot \frac{13^2}{81^2} - \frac{1}{9}.$$

Tačiau nario a_7 rasti negalėsime, nes

$$2 \cdot \frac{13^2}{81^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 169}{9 \cdot 81} = \frac{1}{9} \cdot \frac{338}{729} < \frac{1}{9}$$

ir todėl $a_7^2 < 0$. Skaičiaus kvadratas visada neneigiamas. Taigi $a_1 \neq \pm 1/3$.

Ats.: a), b), c) taip, gali;
d), e) ne, negali.

4. Duotojo devyniolikakampio visi kampai yra $10°$ kartotiniai. Įrodykite, kad devyniolikakampis turi bent vieną lygiagrečių kraštinių porą.

Sprendimas. Laikysime, kad atkarpos, esančios vienoje tiesėje, yra lygiagrečios. T. y. mums rūpės tik atkarpų pasvirimo kampas – jei jis toks pats, tai atkarpas laikysime lygiagrečiomis, net jei jos vienoje tiesėje. Negretimos 19-kampio kraštinės gali būti vienoje tiesėje, kai turime neiškiląjį daugiakampį. Jei tokių kraštinių nelaikysime lygiagrečiomis, uždavinio teiginys bus klaidingas. Jei vienoje tiesėje atsidurtų gretimos kraštinės, tai jos sudarytų vieną atkarpą ir 19-kampis išsigimtų į 18-kampį.

Jei kelios iš eilės einančios kokio nors daugiakampio kraštinės poromis iš eilės sudaro daugiakampio kampus β_1, β_2, …, β_k, tai pirmąją kraštinę pasukus kampu β_1 ji taps lygiagreti su antrąja, tada pasukus kampu β_2 (ta pačia kryptimi) – su trečiąja ir t. t. Taigi kad pirmoji kraštinė taptų lygiagreti su paskutiniąja, ją iš viso reikės pasukti kampu $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$. Pasukus atkarpą $180°$ kampu jos pasvirimas lieka toks pats. Vadinasi, jei kampas $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$ (laipsniais) yra 180 kartotinis, tai pirmoji ir paskutinioji kraštinės lygiagrečios.

Iš eilės pažymėkime 19-kampio viršūnes A_1, A_2, …, A_{19}, o atitinkamus vidinius 19-kampio kampus pažymėkime $\alpha_1 = a_1 \cdot 10°$, $\alpha_2 = a_2 \cdot 10°$, …, $\alpha_{19} = a_{19} \cdot 10°$. Čia a_i yra natūralieji skaičiai.

Nagrinėkime iš eilės einančias kraštines $A_{19}A_1$, A_1A_2, ..., $A_{18}A_{19}$ ir 18 kampų

$$\alpha_1, \quad \alpha_1+\alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{18}.$$

Jei kuris nors iš jų yra 180° kartotinis, tai pirmoji kraštinė $A_{19}A_1$ lygiagreti su viena iš likusių kraštinių. Tarkime, kad taip nėra. Tada joks iš kampų (išreikštų laipsniais) nesidalija iš 180 ir joks iš 18 natūraliųjų skaičių

$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad \ldots, \quad a_1+a_2+\ldots+a_{18}$$

nesidalija iš 18. Jei natūralusis skaičius nesidalija iš 18, tai jis dalijasi iš 18 su viena iš 17 liekanų 1, 2, ..., 17. Turime 17 liekanų ir 18 skaičių, todėl (pagal Dirichlė principą) atsiras du skaičiai

$$a_1+a_2+\ldots+a_i, \quad a_1+a_2+\ldots+a_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 18,$$

besidalijantys iš 18 su ta pačia liekana. Jų skirtumas $a_{i+1}+\ldots+a_j$ dalijasi iš 18 be liekanos ir kampas $\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_j$ yra 180° kartotinis. Nagrinėdami iš eilės einančias kraštines A_iA_{i+1}, ..., A_jA_{j+1} ir šį kampą, gauname, kad (skirtingos) kraštinės A_iA_{i+1} ir A_jA_{j+1} yra lygiagrečios.

Taigi bet kuriuo atveju 19-kampis turi dvi lygiagrečias kraštines.