LIII Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kaunas, 2004 m. balandžio 6 d.

IX - X klasės

1. Stačiakampio formos popieriaus lapas $ABCD$ sulenkiamas per įstrižainę AC. Kraštinė AD naujoje padėtyje kerta kraštinę BC taške E. Raskite santykį $BE : EC$, jei $AB = a$, $AD = b$, $b > a$.

2. Tomas ir Romas žaidžia tokį žaidimą. Žaidėjai pakaitomis (pradeda Tomas) deda monetas į kvadratinės lentos 20×20 laukelius. Vienu ėjimu leidžiama padėti monetą į tuščią laukelį. Žaidėjas laimi, jei po jo ėjimo galima rasti keturias monetas, kurios būtų viršūnės stačiakampio su kraštinėmis, lygiagrečiomis lentos kraštams.

Kuris iš žaidėjų ir kaip žaisdamas visada gali laimėti?

3. Įrodykite nelygybę

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

jei a, b ir c – teigiamieji skaičiai.

4. Teigiamųjų skaičių x, y, z sandauga lygi 1. Įrodykite, kad tada

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

LIII Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kaunas, 2004 m. balandžio 6 d.

XI - XII klasės

1. Kvadratinės lentelės $n \times n$ kiekviename langelyje įrašomas 1 arba -1. Tegul a_i yra i-tojoje eilutėje esančių skaičių sandauga, o b_j yra j-tajame stulpelyje esančių skaičių sandauga.

Ar galima taip užpildyti lentelę, kad suma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_j + \ldots + b_n$$

būtų lygi nuliui, kai

a) $n = 10$;

b) $n = 9$?

2. Lygiašonio trikampio dviejų pusiaukraštinių ilgiai yra $\sqrt{1 - 2^{-2004}}$ ir $2 - 2^{-2004}$. Raskite trečios pusiaukraštinės ilgį.

3. Begalinė realiųjų skaičių seka a_n ($n \in \mathbb{N}$) tenkina sąlygą

$$a_{k^2+m^2} = a_k^2 + a_m^2 \quad (k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N})$$

(todėl, pavyzdžiui, $a_{10} = a_{1^2+3^2} = a_1^2 + a_3^2$).

Gali ar negali pirmas tokios sekos narys a_1 būti lygus skaičiui:

a) 0; b) 1; c) -1; d) $1/3$; e) $-1/3$?

4. Duotojo devyniolikakampio visi kampai yra $10°$ kartotiniai. Įrodykite, kad devyniolikakampis turi bent vieną lygiagrečių kraštinių porą.