LIV LIETUVOS MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Visaginas, 2005 03 31

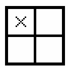
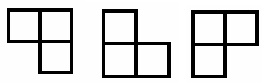
IX–X klasės

SPRENDIMAI

1. Pirmiausia pastebėkime, kad duoto skaičių rinkinio suma yra $\frac{n(n+1)}{2}$. Kad galima būtų skaičius suskirstyti į tris grupes suma turi dalintis iš trijų, o tai reiškia, kad arba n turi dalintis iš 3 arba n + 1 turi dalintis iš trijų. Įrodysime, kad abiem šiais atvejais skaičius suskirstyti galima.

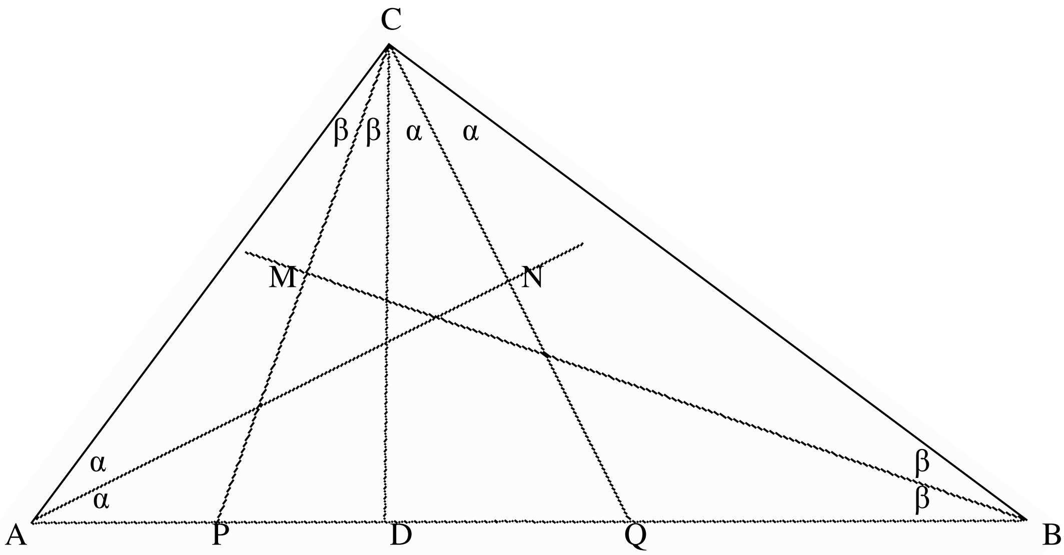
   Kai n = 5 suskirstymas 5 | 4, 1 | 3, 2.
   Kai n = 6 suskirstymas 6,1 | 5, 2 | 4, 3
   Kai n = 8 suskirstymas 1, 2, 3, 6 | 4, 8 | 5, 7
   Kai n = 9 suskirstymas 1, 2, 3, 4, 5 | 7, 8 | 6, 9

   Taip pat mokame išskirstyti ir 6 paeiliui einančius skaičius:
   k + 1, k + 6 | k + 2, k + 4 | k + 3, k + 4 .
   Lieka pastebėti, kad bet koks skaičius besidalijantis iš 3 (ir > 3) užsirašo arba 6k + 6, arba 6k + 9, o bet koks skaičius 3k – 1 užsirašo arba 6k + 5, arba 6k + 8.

2. Paimkime bet kokį kvadratėlį ant lentos. Būtinai atsiras kvadratas 2 × 2, kuriam jis priklausys.  Pakeisime to kvadratėlio spalvą į priešingą taip, kad likusių spalvos nepakistų. Dažykime tris kartus taip: 

   Tada pasirinktasis kvadratėlis bus perdažytas tris kartus, o trys likę po du kartus – t.y. liks tokios spalvos kokios ir buvo. Kadangi galime bet kurį kvadratėlį perdažyti iš juodo į baltą, nepakeitę kitų, tai lentą perdažyti pavyks visada.

3.



Pažymime kampą A - 2α , o kampą B - 2β. Tada akivaizdžiai kampai CAN, NAB, DAN ir NAB lygūs α, o kampai AMB, MBC, ACM ir MCD lygūs β. Iš čia – kampas CNA lygus 180º - 2α - 2β = 90º . Analogiškai CMB taip pat lygus 90º. Iš čia gauname, kad trikampiai CAQ ir CBP lygiašoniai ir CN = NQ ir CM = MP. Gauname, kad
MN = PQ/2 = (3 + 4 – 5)/2 = 1.

4. Išskaidę 4242 dauginamaisiais gauname 4242 = 101·2·3·7 . Tarkime, kad radome natūraliuosius skaičius a,b ir c tokius, kad lygybė teisinga. Tada bent vienas dauginamasis iš (a+b), (b+c) ir (c+a) turi dalintis iš 101 (101 - pirminis). Neprarasdami bendrumo, tarkime, kad tai (a+b). Tada bent vienas iš a ir b turi būti didesnis už 50, ir iš čia - vienas iš (b+c), (c+a) turi būti didesnis už 50. Bet tada (a+b)(b+c)(c+a) > 50·101 > 4242. Prieštara.

LIV LIETUVOS MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

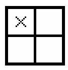
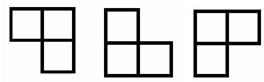
Visaginas, 2005 03 31

XI–XII klasės

1. Prie pirmų 13 skaičių ženklus sudėliokime taip, kad suma būtų 1:

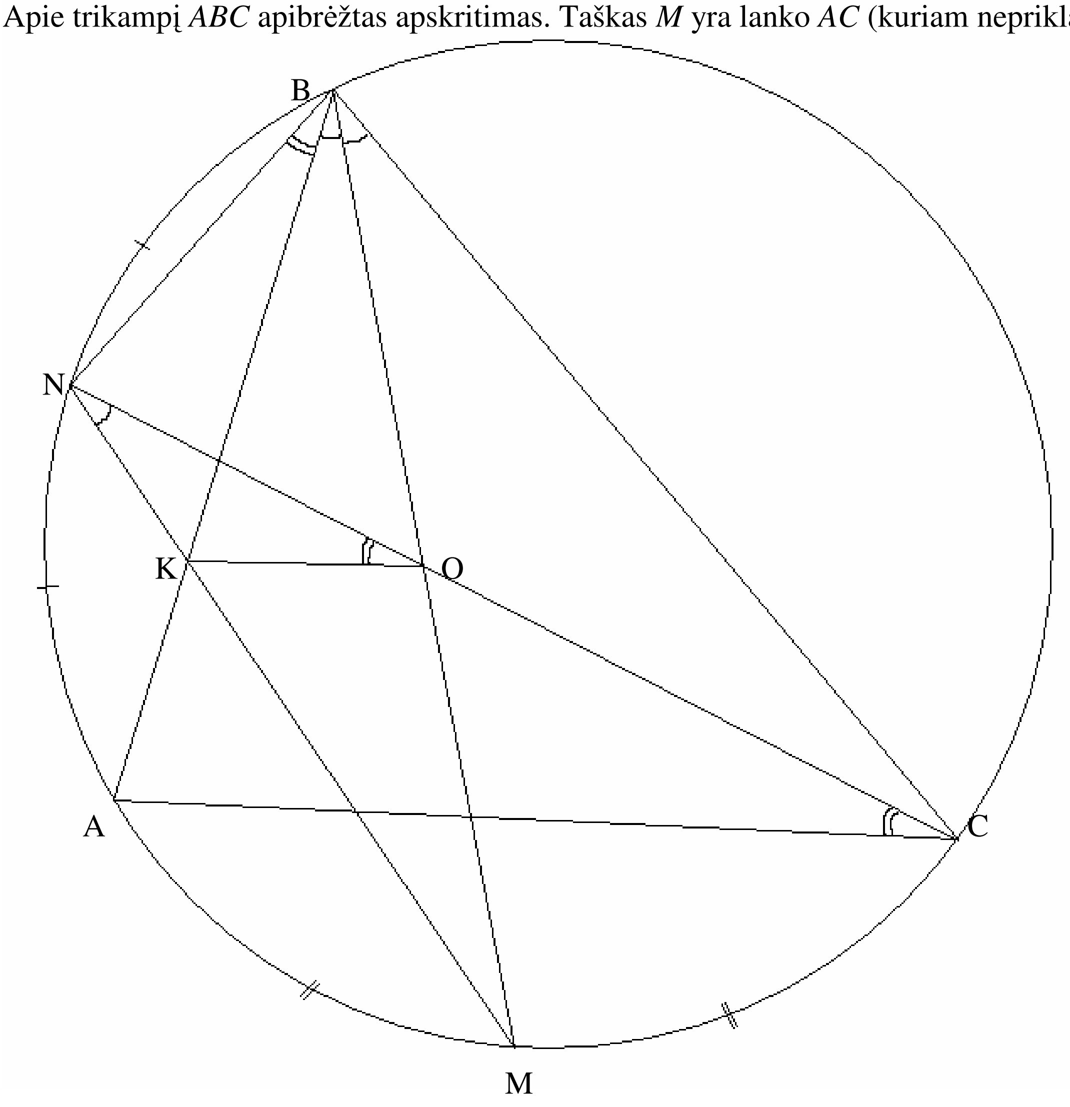
$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 - 10^2 + 11^2 - 12^2 + 13^2$$

   Prie kiekvienos iš toliau einančių aštuoniukių (2005 – 13 dalinasi iš 8) ženklus dėliojame taip, kad suma būtų 0: – + + – + – – +. Gavome sumą lygią 1. Įsitikinti, kad ji negali būti lygi 0 nesunku – užtenka pastebėti, kad tarp duotų skaičių yra nelyginis skaičius nelyginių dėmenų, todėl rezultatas visad bus nelyginis.

2. Paimkime bet kokį kvadratėlį ant lentos. Būtinai atsiras kvadratas 2 × 2, kuriam jis priklausys.  Pakeisime to kvadratėlio spalvą į priešingą taip, kad likusių spalvos nepakistų. Dažykime tris kartus taip: 

   Tada pasirinktasis kvadratėlis bus perdažytas tris kartus, o trys likę po du kartus – t.y. liks tokios spalvos kokios ir buvo. Kadangi galime bet kurį kvadratėlį perdažyti iš juodo į baltą, nepakeitę kitų, tai lentą perdažyti pavyks visada.

3. Apie trikampį *ABC* apibrėžtas apskritimas. Taškas *M* yra lanko *AC* (kuriam nepriklauso vi



Išveskime trikampio ABC kampų B ir C pusiaukampines. Jos eis per O, ir dalins kertamus lankus pusiau (nes vienodo dydžio įbrėžtiniai kampai riboja vienodo ilgio lankus) t.y. B pusiaukampinė eis per O ir per M, o C pusiaukampinė per O ir per N. Tada iš įbrėžtinių kampų gauname, kad kampas MNC lygus kampui MBC, o šis lygus MBA. (žr. brėžinį). Gauname, kad apie keturkampį NKOB galima apibrėžti apskritimą. Tada kampas NOK lygus NBK, ir tuo pačiu NCA. Iš čia KO || AC.

4. Pastebėkime, kad ieškoma seka – didėjanti (pridedama po teigiamą skaičių). Duotą lygybę pakėlę kvadratu ir sutvarkę gauname $a_{n+1}^2 - a_{n+1}(2a_n + 1) + a_n^2 - a_n$. Išsprendžiame kvadratinę lygtį: $a_{n+1} = \dfrac{(2a_n + 1) \pm \sqrt{8a_n + 1}}{2}$. Kadangi $\sqrt{8a_n + 1} > 1$, tai šaknis su minuso ženklu netinka (nes prieštarautų sekos didėjimui). Vadinasi, turėdami pirmąjį narį vienareikšmiškai randame visus likusius – t.y. seka vienintelė. Paskaičiavę pirmus keletą narių (1, 3, 6, 10, 15) lengvai pastebime dėsningumą - $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Įstatę šią išraišką į duotąją lygybę nesunkiai gauname, kad ši seka tinka.