LV LIETUVOS MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Juozas Juvencijus Mačys
Matematikos ir informatikos institutas

55-oji Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada vyko Pasvalyje 2006 m. balandžio 11 d. Pateikiame olimpiados uždavinių sąlygas ir sprendimus.

IX–X klasės

1. *Įrodykite,* n *kad* $n^2+2n+12$ *nesidalija iš* 121*, jei n yra sveikasis skaičius.*

<u>Sprendimas.</u> Tarkime, kad $(n+1)^2+11\,\vdots$ (dalijasi iš) 121 , tada $(n+1)^2+11\,\vdots\,11$, todėl $(n+1)\,\vdots\,11$, ir $(n+1)^2\,\vdots\,121$. Bet $(n+1)^2+11\,\vdots\,121$, vadinasi $11\,\vdots\,121$ – prieštara.

Galima apseiti ir be prieštaros. Turime $A=(n+1)^2+11$. Jei $(n+1)\,\overline{\vdots}\,11$, tai $(n+1)^2\,\overline{\vdots}\,11$, ir $A\,\overline{\vdots}\,11$. Jei $(n+1)\,\vdots\,11$, tai $(n+1)^2\,\vdots\,121$, bet $11\,\overline{\vdots}\,121$, ir vėl $A\,\overline{\vdots}\,121$.

Dar kitaip. Dalydami $n+1$ iš 11, gauname $n+1=11k\pm r$, $r=$ 0, 1, 2, 3, 4, 5. Tada $A=121k^2+22kr+r^2+11$, ir *A* galėtų dalytis iš 11 tik kai $r^2\,\vdots\,11$, t.y. kai $r=0$, bet tada $A=121k^2+11$ ir nesidalija iš 121.

2. *Lygiašoniame trikampyje ABC, kuriame AB=BC, nubrėžta pusiaukampinė AD. Duota, kad AC=AD+DB. Raskite trikampio BC kampus.*

<u>Atsakymas.</u> $\angle BAC=\angle ACB=40°$, $\angle ABC=100°$.

<u>Sprendimas</u>. Kraštinėje *AC* atidedame $AE=AD$ (pasidarykite brėžinį), tada $BD=EC$. Pagal pusiaukampinės savybę *AD* dalija kraštinę *BC* santykiu $BD/CD=AB/AC$. Trikampiai CDE ir ABC panašūs, nes $\angle C$ bendras ir $EC/CD=BC/CA$, todėl $\angle CDE=\angle ECD=\angle BAC(=2\alpha)$. Iš lygiašonio ΔADE $\angle AED=90°-\alpha/2$, nes $\angle DAE=\alpha$. $\angle DEC=180°-\angle ECD-\angle EDC=180°-4\alpha$. Kampai *AED* ir *DEC* gretutiniai, todėl $90°-\alpha/2+180°-4\alpha=180°$, iš kur $\alpha=20°$. Taigi $\angle BAC=\angle ACB=2\alpha=40°$, $\angle ABC=180°-2\angle ACB=100°$.

3. *Kiek yra natūraliųjų skaičių a, b, c trejetų (a, b, c), su kuriais teisinga lygybė* $a^2+3b^2=c^3$, *jei*

A) *tarp skaičių a, b, c gali būti lygių?*

B) *iš skaičių a, b, c jokie du nėra lygūs?*

Atsakymas. A) Be galo daug; B) be galo daug.

Sprendimas. A) Paėmę $a=b$, gauname, kad $4a^2=c^3$. Akivaizdu, kad $(a,\ c)=(4n^3,\ 4n^2)$, kur $n\in N$ tenkina lygtį. Taigi $a=4n^3$, $b=4n^3$, $c=4n^2$ tenkina pradinę lygtį, kai $n\in N$. Su skirtingais *n* gauname, skirtingus sprendinius, todėl jų yra be galo daug.

B) Paėmę $a=9a'$, $b=3b'$, $c=3c'$, gauname $81a'^2+27b'^2=27c'^3$, $3a'^2+b'^2=c'^3$. Jau įsitikinome, kad jei skaičiai gali būti lygūs, tai šią lygtį tenkina sprendiniai $a'_n=b'_n=4n^3$, $c'_n=4n^2$. Vadinasi pradinę lygtį tenkina $a=36n^3$, $b=12n^3$, $c=12n^2$ ($n\in N$). Kai $n\geq 2$, tai $a=36n^3>b=12n^3>c=12n^2$. Taigi sąlygą tenkina trejetai $(36n^3, 12n^3, 12n^2)$, kai $n\geq 2$, ir jokie du trejetai nėra vienodi, todėl sprendinių yra be galo daug.

4. *Iš skaičių* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *išmetant kelis sudaromas toks rinkinys A, kad visos galimos jo dviejų skaičių sumos būtų skirtingos. Kiek daugiausiai skaičių gali būti rinkinyje A?*

Atsakymas. 5 .

Sprendimas. Nurodyti penkių skaičių rinkinį nesunku – pavyzdžiui, tinka rinkinys {1, 2, 3, 5, 9}. Iš 5 imant po 2 galima sudaryti daugiausia $C_5^2=9*4/2=10$, o čia jų tiek turime – tai 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14. Įrodykime, kad daugiau skaičių rinkinyje būti negali.

Tarkime, kad radome rinkinį *A* iš 6 skaičių, tenkinantį sąlygą. Jo visos dviejų elementų sumos skirtingos, taigi sumų yra $C_6^2=6\cdot 5/2=15$. Bet netgi iš visų 9 skaičių nuo 1 iki 9 imant po 2 galima sudaryti tik 15 sumų (nuo 3 iki 17). Taigi rinkinys turi duoti visas tas sumas, todėl jame yra 1 ir 2 (kitaip negautume sumos 3) bei 8 ir 9 (kitaip negautume sumos 17). Bet $1+9=2+8$, sumos lygios – prieštara.

XI–XII klasės.

1. *Išspręskite lygčių sistemą:*

$$\begin{cases} x^4 + y^2 - xy^3 - 9x/8 = 0 \\ y^4 + x^2 - x^3 y - 9y/8 = 0. \end{cases}$$

Atsakymas. $(0,0)$, $(9/8, 9/8)$, $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$.

Sprendimas. Dauginame pirmą lygį iš *y*, antrą – iš *x*: { $x^4 y + y^3 - xy^4 - 9xy/8 = 0$, $xy^4 + x^3 - x^4 y - 9xy/8 = 0$ }. Atimame šias lygtis vieną iš kitos ir išskaidome: $y^3 - x^3 + 2x^4 y - 2xy^4 = 0$, $\left(y^3 - x^3\right)(1 - 2xy) = 0$.

Turime du atvejus: 1) $x = y$; 2) $2xy = 1$.

1) atveju pradinės lygtys virsta ta pačia $x^4 + x^2 - x^4 - 9x/8 = 0$, $x(x - 9/8) = 0$, ir gauname sprendinius $x = 0, y = 0$ ir $x = 9/8, y = 9/8$.

2) atveju $x \neq 0$ (nes $2xy = 1$), todėl $y = 1/(2x)$, $x^4 + 1/\left(4x^2\right) - 1/\left(8x^2\right) - 9x/8 = 0$, $8x^6 + 1 - 9x^3 = 0$, $\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 - 1/8\right) = 0$, ir gauname sprendinius $x = 1, y = 1/2$ bei $x = 1/2, y = 1$.

2. *Du apskritimai liečia vienas kitą iš išorės taške B. Per vieno apskritimo tašką A išvesta liestinė kerta kitą taškuose C ir D. Įrodykite, kad taškas A vienodai nutolęs nuo tiesių BC ir BD.*

Sprendimas. Sakykime, kad *BD* antrą sykį kerta apskritimą taške *E* (pasidarykite brėžinį). Mums pakanka įrodyti, kad $\angle ABE = \angle ABC$, tada *BA* yra kampo *CBE* pusiaukampinė, ir kiekvienas jos taškas (taigi ir *A*) vienodai nutolęs nuo tiesių *BC* ir *BE*. Bet kampas *ABC* lygus jame esančių apskritimo lankų *AB* ir *BC* sumos pusei, o *ABE* yra trikampio *BD* priekampis ir lygūs sumai kampų *A* ir *D*, kurie atitinkamai lygūs pusei lanko *AB* ir pusei lanko *BC*.

3. *Visi trys skaičiai a, b, c skirtingi ir nelygūs* 0, *a*+*b*+*c*=0. *Įrodykite, kad*

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9.$$

Sprendimas. Kadangi $a + b + c = 0$, tai $a + b = -c$, $b + c = -a$, $a + b + c = 0$. Padauginkime abi duotos lygybės puses iš *abc* ($abc \neq 0$). Tada dešinė pusė tampa 9*abc*. Kairėje pusėje iš *abc* dauginame pirmus skliaustus – jie virsta $bc(b-c) + ac(c-a) + ab(a-b) =$

$$bc(b-c)+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2=$$
$$bc(b-c)-a(b^2-c^2)+a^2(b-c)=(b-c)(bc-ab-ac+a^2)=$$
$$(b-c)(a-b)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$$
(minusą iškėlėme tam, kad reiškinio dauginamieji būtų cikliškai gaunami vienas iš kito – tada žymiai lengviau užrašinėti visus veiksmus).

Todėl kairė pusė virsta

$$-a(c-a)(a-b)-b(a-b)(b-c)-c(b-c)(c-a)=$$
$$=(-a^2c+a^3+abc-a^2b)+(-b^2a+b^3+bca-b^2c)+$$
$$+(-c^2b+c^3+cab-c^2a)=a(a^2+ab+ac+bc)+$$
$$+b(b^2+bc+ba+ca)+c(c^2+ca+cb+ab)-$$
$$-2(a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a)=$$
$$=b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)+$$
$$+a(a+b)(a+c)-2ac(a+c)-2ba(b+a)-2cb(c+b)=$$
$$=b(-a)(-c)+cba+acb+2acb+2bac+2cba=9abc,$$
taigi lygi dešiniajai.

4. Žr. IX–X klasių 4 uždavinį.

Lietuvos olimpiados nugalėtojai puikiai pasirodė 2006 metų Pasaulio moksleivių matematikos olimpiadoje, kuri vyko Slovėnijos sostinėje Liublianoje (užduotis ir rezultatus žr. [1]).

2005 m. Lietuvos olimpiados užduotys apžvelgtos straipsnyje [2], 2007 m. užduotys bus apžvelgtos straipsnyje [3].

Literatūra

1. International Mathematical Olympiad-2006, Ljubljana. Internete: http://imo2006.dmfa.si
2. J. J. Mačys, 2005 m. Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados uždavinių analizė. Liet. matem. rink., **46**, spec. nr., 167–171 (2006).
3. J. J. Mačys.

PROBLEMS OF LITHUANIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD - 2006.

Juozas Juvencijus Mačys

The problems of the Lithuanian school olympiad - 2006 are presented and solutions are given.