56-OJI LIETUVOS MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2007 04 03

IX–X klasės

1. Vienetinio kvadrato viršūnėse tupi 4 blusos. Kiekvienu ėjimu viena blusa gali peršokti per bet kurią kitą. Blusa *A*, peršokusi per blusą *B*, nusileidžia toje pačioje tiesėje *AB*, o atstumas tarp jų lieka toks pat. Ar gali jos taip šokinėdamos po baigtinio ėjimų skaičiaus atsidurti

a) kvadrato 2×2 viršūnėse;

b) kurio nors nevienetinio kvadrato viršūnėse?

2. Seka (a_n) su visais natūraliaisiais *n* tenkina sąlygą

$$n^2 a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Duota, kad $a_1 = 1002$. Raskite a_{2006}.

3. Turime lygtį

$$x^{17} + y^{17} + z^{17} - x^{10}y^7 - y^{10}z^7 - z^{10}x^7 = 1.$$

a) Nurodykite bent 4 lygties sprendinius.

b) Raskite visus tokius sprendinius $(x,\ y,\ z)$, kad $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

4. Duotas statusis trikampis *ABC*, kurio statiniai $BC = a$, $AC = b$. Taškas *D* yra aukštinės, nuleistos iš stačiojo kampo viršūnės *C* į įžambinę *AB*, pagrindas. Statinyje *BC* paimtas toks taškas *E*, kad $CE = \frac{1}{2} BD$, o atkarpoje *AE* – toks taškas *F*, kad $EF = CE$. Raskite atkarpos *AF* ilgį.

56-OJI LIETUVOS MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2007 04 03

XI–XII klasės

1. a) k yra sveikasis skaičius. Įrodykite, kad skaičių

$$(2k+1)^3-(2k-1)^3$$

galima išreikšti trijų sveikųjų skaičių kvadratų suma.

b) n yra natūralusis skaičius. Įrodykite, kad skaičių

$$(2n+1)^3-2$$

galima išreikšti suma $3n-1$ dėmenų, kurių kiekvienas yra didesnio už vienetą natūraliojo skaičiaus kvadratas.

2. Baltame kvadrate 7×7, padalytame į vienetinius kvadratėlius, užtušuoti 29 kvadratėliai. Įrodykite, kad visada galima rasti „kampuką“, sudarytą iš trijų užtušuotų langelių.

3. Dvi gretimos kvadrato viršūnės yra apskritime, kurio spindulys lygus 1. Didžiausią atstumą, kuriuo kvadrato viršūnė gali būti nutolusi nuo apskritimo centro, pažymėkime M.

c) Įrodykite, kad $\sqrt{5}<M<\sqrt{7}$.

d) Raskite M.

4. Funkcija $f(x)$ apibrėžta teigiamiesiems skaičiams, įgyja teigiamąsias reikšmes ir su visais teigiamaisiais x ir y tenkina lygybę

$$f(x)f(y)=f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right).$$

a) Nurodykite bent tris tokias funkcijas.

b) Įrodykite, kad $f(x)\geq 2$, $f(1)=2$.

c) Įrodykite, kad jei $f(x)$ tenkina sąlygą, tai ją tenkina ir funkcija $f^2(x)-2$.