2008 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas [1]

57-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Panevėžys, 2008 03 18

`1 (9-12 klasės).` Duota, kad

$$M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

kur a, b, c ir d – sveikieji skaičiai.

a) Ar visada M dalijasi iš 12 ?

b) Ar visada M dalijasi iš 24 ?

Sprendimas. Iš keturių skaičių a, b, c, d bent du duoda vienodas liekanas, dalijant juos iš 3. Tų dviejų skaičių skirtumas dalijasi iš 3. Taigi M visada dalijasi iš 3. Jei bent trys iš skaičių a, b, c, d yra lyginiai, arba bent trys nelyginiai, tai kiekvienas iš trijų skirtumų (tarp tų trijų skaičių) dalijasi iš 2, todėl M dalijasi iš 8. Jei du iš skaičių a, b, c, d yra lyginiai, o kiti du – nelyginiai, tai du skirtumai (tarp abiejų lyginių ir abiejų nelyginių skaičių) dalijasi iš 2, todėl M dalijasi iš 4. Taigi visais atvejais M dalijasi iš 4, todėl M dalijasi ir iš $3 \cdot 4 = 12$. Jeigu $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$, tai $M = 12$, todėl M nebūtinai dalijasi iš 24.

Atsakymas: a) visada, b) ne visada.

`2 (9-10 klasės).` Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Atkarpa BD yra to apskritimo skersmuo. Iš viršūnės A nubrėžta aukštinė kerta apskritimą taške E. Įrodykite, kad keturkampio $BECD$ plotas yra lygus trikampio ABC plotui.

Sprendimas. Tegul H yra kampo A aukštinės pagrindas, o F – statmens iš taško D į atkarpą AE pagrindas.Trikampis DBC yra statusis, todėl atkarpa DC yra lygiagreti atkarpai AE. Taigi $AECD$ yra lygiašonė trapecija, o $FHCD$ – stačiakampis. Todėl $FE = FH + HE = FH + AF = AH$. Keturkampio

[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

$BECD$ plotas yra lygus $\frac{1}{2}BC \cdot FE$, o trikampio ABC plotas lygus $\frac{1}{2}BC \cdot AH$, taigi šie plotai yra lygūs.

`3 (9-10 klasės).` Įrodykite, kad jeigu $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, tai

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Sprendimas. Aišku, kad $7+y^3+z^3 \geqslant 6+x^3+y^3+z^3$, taigi pirmoji trupmena neviršija $x/(6+x^3+y^3+z^3)$. Analogiškai, antroji trupmena neviršija $y/(6+x^3+y^3+z^3)$, o trečioji neviršija $z/(6+x^3+y^3+z^3)$. Taigi jų suma yra ne didesnė už $(x+y+z)/(6+x^3+y^3+z^3)$. Belieka įrodyti, kad

$$3(x+y+z) \leqslant 6+x^3+y^3+z^3.$$

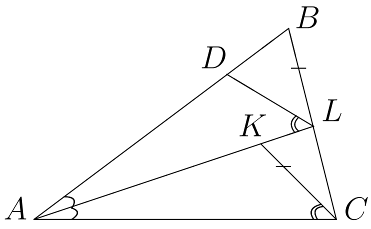
Iš nelygybės $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2) \geqslant 0$ išplaukia, kad $3x \leqslant 2+x^3$. Analogiškai, $3y \leqslant 2+y^3$ ir $3z \leqslant 2+z^3$. Sudėję šias tris nelygybes gausime, kad $3(x+y+z) \leqslant 6+x^3+y^3+z^3$.

`4 (9-10 klasės).` Atsitiktinai imamos 9 taisyklingojo dvidešimtkampio viršūnės. Įrodykite, kad tarp jų visada atsiras tokios trys, kurios yra lygiašonio trikampio viršūnės.

Sprendimas. Pastebėkime, kad imdami kas ketvirtą viršūnę iš taisyklingojo dvidešimtkampio gausime keturis taisyklinguosius penkiakampius. Bent į vieną iš šių keturių penkiakampių pateks bent trys iš 9 taisyklingojo dvidešimtkampio viršūnių. Tačiau bet kokios trys taisyklingojo penkiakampio viršūnės (taigi ir šios trys) sudaro lygiašonį trikampį.

`5 (11-12 klasės).` Trikampio ABC pusiaukampinė AL lygi kraštinei AC. Toje pusiaukampinėje yra toks taškas K, kad $CK = BL$. Įrodykite, kad kampas CKL yra lygus kampui ABC.

Sprendimas. Tegul D yra toks atkarpos AB taškas, kad kampas ACK yra lygus kampui ALD.



Kadangi $\angle DAL = \angle KAC$ ir $AC = AL$, tai trikampiai ACK ir ALD – lygūs. Taigi $CK = LD$ ir $\angle CKL = \angle BDL$. Vadinasi, $BL = CK = LD$, todėl trikampis DLB – lygiašonis. Taigi $\angle CKL = \angle BDL = \angle DBL = \angle ABC$.

`6 (11-12 klasės).` Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais $n^7 + n^2 + 1$ yra pirminis skaičius.

Sprendimas. Kai $n = 1$, tai $n^7 + n^2 + 1 = 3$ – pirminis skaičius. Kadangi

$$n^7 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1)$$

ir abu daugikliai $n^2 + n + 1$, $n^5 - n^4 + n^2 - n + 1$ yra didesni už 1, kai $n \geqslant 2$, tai su kiekvienu $n \geqslant 2$ skaičius $n^7 + n^2 + 1$ nėra pirminis.

Atsakymas: $n = 1$.

`7 (11-12 klasės).` Lentoje užrašyti 1004 skaičiai: $2, 4, 6, \ldots, 2008$. Du žaidėjai pakaitomis daro tokį ėjimą:

> pasirenka kurį nors lentoje užrašytą skaičių, jį nutrina, o jo vietoje įrašo vienetu mažesnį skaičių, be to, jeigu lentoje atsiranda nulis, tai jį iš karto nutrina, o jeigu atsiranda du vienodi skaičiai, tai nutrina vieną iš jų.

Laimi tas žaidėjas, kurio varžovas nutrina paskutinį skaičių. Įrodykite, kad žaidimą pradedantis žaidėjas visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų antras žaidėjas. Kaip pradedantis žaidėjas turi žaisti?

Sprendimas. Po pirmojo ėjimo lygiai vienas skaičius bus nelyginis. Įrodysime, kad pirmasis žaidėjas visada gali žaisti taip, kad po jo ėjimo visada lygiai vienas skaičius bus nelyginis bei lentoje nebus jokios poros $2k - 1$, $2k$. Iš tikrųjų, jei antrasis žaidėjas savo ėjimą atlieka su šiuo vieninteliu nelyginiu skaičiumi, tai po jo ėjimo visi skaičiai bus lyginiai ir pirmasis nesunkiai pasiekia savo tikslą (jei žaidimas dar nebaigtas), nes dviejų vienodų skaičių po bet kokio ėjimo lentoje nėra. Jeigu antrasis atlieka ėjimą su kokiu nors kitu skaičiumi (kuris yra lyginis), tai po jo ėjimo lentoje bus du skirtingi nelyginiai skaičiai, nes prieš jo ėjimą jokios poros $2k-1$, $2k$ lentoje nebuvo. Be to, tokia pora po šio ėjimo atsirasti negali, nes dviejų vienodų skaičių prieš bet kokį ėjimą lentoje nėra. Tada pirmasis žaidėjas savo ėjimu sumažina mažesnįjį iš dviejų lentoje esančių nelyginių skaičių vienetu ir taip pasiekia savo tikslą: lygiai vienas iš likusių skaičių bus nelyginis bei nebus jokios poros $2k-1$, $2k$. Kadangi visų lentoje užrašytų skaičių suma po kiekvieno ėjimo mažėja, tai taip žaisdamas pirmasis žaidėjas visada pasieks situaciją, kai po jo ėjimo lentoje liks tik vienintelis skaičius (kuris bus nelyginis, sakykime, $2k-1$) ir po $2k-1$ ėjimo laimės žaidimą.