2009 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas [1]

58-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Druskininkai, 2009 04 07

`1 (9-10 klasės).` Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybę

$$28a + 30b + 31c = 365.$$

a) Kelias reikšmes gali įgyti suma $a + b + c$?
b) Raskite visus šios lygties natūraliuosius sprendinius (a, b, c).

Sprendimas. Įrodysime, kad jei lygtis turi bent vieną natūralųjį sprendinį (a, b, c), tai $a + b + c = 12$. Is tikrųjų, jei $a + b + c \leqslant 11$, tai

$$365 = 28a + 30b + 31c < 31(a + b + c) \leqslant 31 \cdot 11 = 341,$$

prieštara. Kita vertus, jei $a + b + c \geqslant 13$, tai

$$365 = 28a + 30b + 31c = 28(a + b + c) + 2b + 3c \geqslant 28 \cdot 13 + 5 = 369,$$

prieštara. Taigi vienintelė įmanoma sumos $a + b + c$ reikšmė yra 12. Tada

$$3a + b = 31(a + b + c) - 28a - 30b - 31c = 31 \cdot 12 - 365 = 7.$$

Šią lygybę tenkina tik dvi natūraliųjų skaičių poros $(a, b) = (1, 4)$ ir $(2, 1)$. Kadangi $c = 12 - a - b$, tai c atitinkamai yra 7 ir 9. Patikrinę nustatome, kad abu trejetai $(a, b, c) = (1, 4, 7)$ ir $(2, 1, 9)$ tikrai tenkina duotąją lygybę:

$$28 \cdot 1 + 30 \cdot 4 + 31 \cdot 7 = 365, \qquad 28 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 31 \cdot 9 = 365.$$

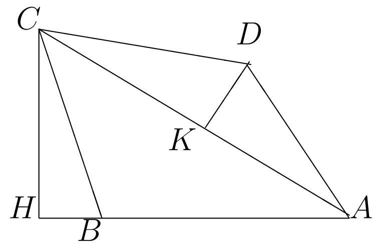
Atsakymas: a) vieną reikšmę, b) $(a, b, c) = (1, 4, 7)$ ir $(2, 1, 9)$.

`2 (9-10 klasės).` Keturkampio $ABCD$ kraštinės AD ir CD lygios, $\angle BCD = 60^0$, $\angle BAC = 30^0$. Įrodykite, kad kraštinės BC ir CD taip pat lygios.

[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

Sprendimas. Tegul K yra atkarpos AC vidurio taškas, o H – iš taško C į tiesę AB išvesto statmens pagrindas. Tada $\angle CAH = \angle BAC = 30^0$ ir $CH = AC \sin 30^0 = \frac{1}{2}AC$. Todėl

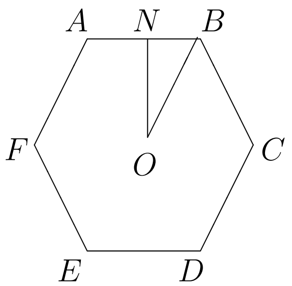
$$\angle HCK = \angle HCA = 90^0 - \angle CAH = 90^0 - 30^0 = 60^0 = \angle BCD.$$



Taigi $\angle HCB = \angle KCD$. Kadangi $CK = \frac{1}{2}AC = CH$, statieji trikampiai BHC ir DKC yra lygūs. Todėl jų įžambinės BC ir CD – lygios.

`3 (9-12 klasės).` Kabineto forma yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė lygi 3 metrams. Kiekvienoje šešiakampio viršūnėje yra prietaisas, kuris rodo, kiek mokinių, nutolusių nuo jo ne didesniu kaip 3 metrų atstumu, miega. Kiek mokinių miega, jei visų šešių prietaisų parodymų suma yra lygi 7?

Sprendimas. Įrodysime, kad kiekvieną miegantį mokinį užfiksuoja lygiai 2, lygiai 3 arba visi 6 prietaisai. Laikykime, kad prietaisai yra kabineto kampuose A, B, C, D, E ir F (pagal laikrodžio rodyklę), o mokinys – taške M. Tegul O yra apie taisyklingąjį šešiakampį $ABCDEF$ apibrėžto apskritimo centras, o N – atkarpos AB vidurio taškas.



Aišku, kad šį teiginį pakanka įrodyti tuo atveju, kai taškas M priklauso trikampiui ONB (t. y. yra jo viduje arba priklauso jo kontūrui), kadangi šešiakampis gali būti padalintas į 12 tokių trikampių. Akivaizdu, kad jei $M = O$, tai M yra lygiai už 3 metrų nuo visų šešiakampio viršūnių, todėl šį miegantį mokinį (jei toks yra) rodo visi 6 prietaisai. Jei $M \neq O$ ir M priklauso trikampiui ONB, tai $MF, ME, MD > 3$, taigi jį gali rodyti ne daugiau kaip 3 prietaisai. Jei $M \neq O$ priklauso trikampio ONB ir skritulio ω, kurio centras taške C, o spindulys $CB = CO = 3$, sankirtai, tai $MC \leqslant 3$, $MA \leqslant 3$ ir $MB < 3$, taigi jį fiksuoja 3 prietaisai, o jei M priklauso trikampiui ONB, bet nepriklauso skrituliui ω, tai $MC > 3$, $MA < 3$ ir $MB < 3$, taigi jį rodo lygiai 2 prietaisai. Teiginys įrodytas.

Sakykime, kad yra a miegančių mokinių, kuriuos užfiksuoja lygiai 2 prietaisai, b miegančių mokinių, kuriuos užfiksuoja lygiai 3 prietaisai, ir c miegančių mokinių, kuriuos užfiksuoja visi 6 prietaisai. Tada $2a + 3b + 6c = 7$. Nesunku įsitikinti, kad vienintelis sveikųjų neneigiamų skaičiu trejetas, tenkinantis šią lygtį, yra $(a, b, c) = (2, 1, 0)$. Vadinasi, kabinete yra $a + b + c = 3$ miegantys mokiniai.

Atsakymas: 3.

`4 (9-10 klasės).` Skaičius $1, 2, 3, \ldots, 4n$ reikia suskirstyti į n grupių po keturis skaičius taip, kad kiekvienoje grupėje vienas iš skaičių būtų lygus likusių trijų tos grupės skaičių aritmetiniam vidurkiui. Kuriems natūraliesiems n tai įmanoma?

Sprendimas. Tarkime, kad n yra toks, kad taip suskirstyti į grupes įmanoma. Jei skaičiai a, b, c, d priklauso vienai grupei ir $a = \frac{b+c+d}{3}$, tai $a+b+c+d = a+3a = 4a$. Taigi kiekvienos grupės skaičių ketverto suma dalijasi iš 4. Vadinasi, visų $4n$ skaičių suma dalijasi iš 4. Kadangi $1 + 2 + 3 + \cdots + 4n = 2n(4n + 1)$, taip bus tik tada, kai n – lyginis skaičius. Taigi, jei n – nelyginis, tai taip suskirstyti į grupes neįmanoma.

Įrodysime, kad taip suskirstyti visada galima, kai n – lyginis. Pastebėkime, kad jei $n = 2$, tai skaičius $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ galime suskirstyti į du ketvertus $2, 3, 4, 7$ (čia $4 = \frac{2+3+7}{3}$) ir $1, 5, 6, 8$ (čia $5 = \frac{1+6+8}{3}$). Analogiškai, kai $n = 2k$, kur k – natūralusis skaičius, aibę $1, 2, 3, \ldots, 8k$ galima suskirstyti į $2k$ grupių po keturis $s+2, s+3, s+4, s+7$ ir $s+1, s+5, s+6, s+8$, kur $s = 0, 8, 16, \ldots, 8(k-1)$. Aišku, kad $s + 4 = \frac{s+2+s+3+s+7}{3}$ ir $s + 5 = \frac{s+1+s+6+s+8}{3}$ su kiekvienu s.

Atsakymas: lyginiams n.

`5 (11-12 klasės).` Duoti trys skirtingi teigiami skaičiai a, b ir c. Įrodykite, kad kvadratinė lygtis

$$(a+b+c)x^2 + 2\Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\Big)x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

turi dvi skirtingas realias šaknis.

Sprendimas. Žinome, kad kvadratinė lygtis $Ax^2 + Bx + C = 0$, kur $A \neq 0$, turi dvi skirtingas realias šaknis, jei kvadratinio trinario Ax^2+Bx+C diskriminantas $D = B^2 - 4AC$ yra teigiamas. Pakėlę kvadratu ir atlikę veiksmus, gauname

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\Big)^2 - (a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \\ &= \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} - 3 - \frac{a}{b} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a}.\end{aligned}$$

Aišku, kad

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} - 1 - \frac{a}{b} = \frac{(a+b)(a-b)^2}{ab^2} > 0.$$

Analogiškai,

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c}{b} - 1 - \frac{b}{c} = \frac{(b+c)(b-c)^2}{bc^2} > 0$$

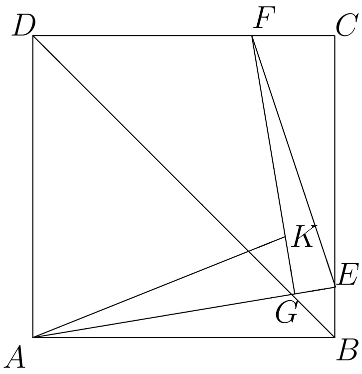
bei

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} - 1 - \frac{c}{a} = \frac{(c+a)(c-a)^2}{ca^2} > 0.$$

Sudėję šias tris nelygybes, gausime $\frac{D}{4} > 0$, taigi $D > 0$.

`6 (11-12 klasės).` E ir F atitinkamai yra kvadrato $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidiniai taškai. Iš taško F tiesei AE išvestas statmuo ją kerta kvadrato įstrižainės BD taške G. Atkarpos FG vidinis taškas K yra toks, kad $AK = EF$. Raskite kampą $\angle EKF$.

Sprendimas. Kadangi $\angle ADF = \angle AGF = 90^0$, tai apie keturkampį $AGFD$ galima apibrėžti apskritimą.



Todėl $\angle GAF = \angle GDF = 45^0$ ir $\angle GFA = \angle GDA = 45^0$. Taigi AGF yra lygiašonis trikampis, $GA = GF$. Kadangi $AK = EF$, statieji trikampiai AGK ir FGE yra lygūs. Vadinasi, $GK = GE$, todėl EGK – statusis lygiašonis trikampis. Taigi $\angle GKE = 45^0$, o $\angle EKF = 180^0 - \angle GKE = 135^0$.

Atsakymas: $\angle EKF = 135^0$.

`7 (11-12 klasės).` Natūralųjį skaičių m vadinkime *paslankiuoju*, jeigu jį galima užrašyti kelių (nebūtinai skirtingų) natūraliųjų skaičių suma taip, kad visų dėmenims atvirkštinių skaičių suma būtų lygi 1. Pavyzdžiui, 11 yra paslankusis skaičius, nes

$$11 = 2 + 3 + 6$$

ir

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

a) Įrodykite, kad 28 yra paslankusis skaičius.
b) Ar 58 yra paslankusis skaičius?
c) Ar 65 yra paslankusis skaičius?
d) Ar 2009 yra paslankusis skaičius?

Sprendimas. Kadangi $28 = 8 + 8 + 4 + 4 + 4$ ir $1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, tai 28 tikrai yra paslankusis skaičius. Įrodysime, kad skaičiai $58, 65$ ir 2009 taip pat yra paslankieji.

Pagal apibrėžimą, jei skaičius N yra paslankusis, tai

$$N = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{ir} \quad 1 = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

su tam tikrais natūraliaisiais skaičiais $a_1, \dots, a_n$. Sakykime, kad N yra paslankusis skaičius. Tada skaičius $2N+2$ taip pat yra paslankusis, kadangi

$$2N+2 = 2a_1 + \cdots + 2a_n + 2 \quad \text{ir} \quad 1 = \frac{1}{2a_1} + \cdots + \frac{1}{2a_n} + \frac{1}{2}.$$

Be to, skaičius $2N+9$ taip pat yra paslankusis, nes

$$2N+9 = 2a_1 + \cdots + 2a_n + 6 + 3 \quad \text{ir} \quad 1 = \frac{1}{2a_1} + \cdots + \frac{1}{2a_n} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}.$$

Įrašę $N = 28$ (jau žinome, kad šis skaičius yra paslankusis), gauname, kad skaičiai $58 = 2 \cdot 28 + 2$ ir $65 = 2 \cdot 28 + 9$ yra paslankieji. Skaičius 2009 taip pat paslankusis, nes keletą kartų taikydami šias dvi taisykles galime gauti tokią paslankiųjų skaičių skaičių seką:

$$28 \to 2 \cdot 28 + 2 = 58 \to 2 \cdot 58 + 2 = 118 \to 2 \cdot 118 + 9 = 245$$

$$\to 2 \cdot 245 + 9 = 499 \to 2 \cdot 499 + 2 = 1000 \to 2 \cdot 1000 + 9 = 2009.$$

Atsakymas: b) taip, c) taip, d) taip.