2010 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas [1]

59-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Trakai, 2010 03 30

`1 (9-10 klasės).` Įrodykite, kad nelygybė

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geqslant \frac{a^3b + ab^3}{2}$$

teisinga su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b.

Sprendimas.

Pirmas būdas. Kadangi $(a-b)(a^3-b^3) \geqslant 0$, tai

$$a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3.$$

Be to,

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2+b^2)^2 \geqslant 2ab(a^2+b^2) = 2a^3b + 2ab^3.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname

$$2a^4 + 2a^2b^2 + 2b^4 \geqslant 3(a^3b + ab^3).$$

Padaliję iš 6, gausime reikiamą nelygybę.

Antras būdas. Kai $b = 0$, nelygybė akivaizdi. Tegul $b \neq 0$. Padauginkime nelygybę iš $6/b^4$ ir pažymėkime $c = a/b$. Mums reikia įrodyti nelygybę

$$2c^4 - 3c^3 + 2c^2 - 3c + 2 \geqslant 0.$$

Kadangi

$$2c^4 - 3c^3 + 2c^2 - 3c + 2 = (c-1)(2c^3 - c^2 + c - 2) = (c-1)^2(2c^2 + c + 2),$$

tai reikiama nelygybė išplaukia iš nelygybių $(c-1)^2 \geqslant 0$ ir

$$2c^2 + c + 2 = c^2 + (c+1/2)^2 + 7/4 > 0.$$

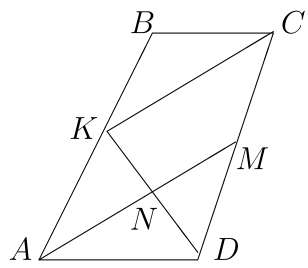
[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

`2 (9-10 klasės).` Trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės AB ilgis lygus pagrindų AD ir BC ilgių sumai. Įrodykite, kad kampo A pusiaukampinė kraštinę CD dalija pusiau.

Sprendimas. Tegul K yra toks atkarpos AB taškas, kad $AK = AD$, ir tegul N – kampo A pusiaukampinės AM ir atkarpos KD susikirtimo taškas. Tada

$$KB = AB - AK = AB - AD = BC.$$

Vadinasi, trikampiai DAK ir KBC yra lygiašoniai. Kadangi $\angle DAB + \angle ABC = 180^0$ ir $\angle DAB = 180^0 - 2\angle DKA$ bei $\angle ABC = 180^0 - 2\angle CKB$, tai $\angle DKA + \angle CKB = 90^0$.



Taigi $\angle DKC = 180^0 - \angle DKA - \angle CKB = 90^0$, todėl trikampis DKC – statusis. Be to, AN yra lygiašonio trikampio DAK pusiaukampinė, taigi ir aukštinė, ir pusiaukraštinė. Vadinasi, atkarpos NM ir KC yra lygiagrečios. Kadangi $KN = ND$, tai $CM = MD$.

`3 (9-12 klasės).` Žaidimo lenta yra stačiakampis, kurio apatinė kraštinė lygi m, o šoninė – n (m ir n yra natūralieji skaičiai). Stačiakampis padalytas į vienetinius kvadratėlius. Kairiajame apatiniame langelyje stovi šaškė. Du žaidėjai daro ėjimus pakaitomis, ir kiekvienu ėjimu žaidėjas pastumia šaškę į kitą langelį: arba per kiek nori langelių į dešinę, arba per kiek nori langelių į viršų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Nustatykite visas įmanomas natūraliųjų skaičių poras (m, n), su kuriomis žaidimą pradedantis žaidėjas gali laimėti, kad ir kaip žaistų antrasis. Nurodykite, kaip jam reikėtų žaisti.

Sprendimas. Jei $m = n = 1$, tai pirmasis žaidėjas pralaimi, nes negali padaryti ėjimo. Įrodysime, kad ir kitais atvejais, kai žaidimo lenta yra kvadratas, t. y. $m = n$, antrasis žaidėjas visada gali laimėti žaisdamas taip. Jei pirmasis savo ėjimu šaškę pastumia per k langelių į dešinę, tai antrasis ją stumia per k langelių į viršų, o jei pirmasis šaškę pastumia per k langelių į viršų, tai antrasis ją stumia per k langelių į dešinę. Taip žaidžiant, po kiekvieno antrojo žaidėjo ėjimo šaškė visada bus ant kvadratinės lentos $n \times n$ įstrižainės, einančios is kairiojo apatinio kampo į dešinįjį viršutinį kampą. Taigi paskutinį įmanomą ėjimą padarys antrasis žaidėjas pastumdamas šaškę ant dešiniojo viršutinio lentos langelio.

Tarkime, kad $m \neq n$. Įrodysime, kad tada pirmasis žaidėjas visada gali laimėti. Kadangi $m \neq n$, tai pirmuoju ėjimu jis gali pastumti šaškę arba ant lentos viršuje esančio $m \times m$ kvadrato įstrižainės (kai $m < n$ ir jis šaškę pastumia per $n - m$ langelių į viršų), arba ant lentos dešinėje pusėje esančio $n \times n$ kvadrato įstrižainės (kai $n < m$ ir jis šaškę pastumia per $m - n$ langelių į dešinę), o toliau laikytis aukščiau nurodytos antrojo žaidėjo taktikos kvadratinėje lentoje. Vadinasi, pirmasis žaidėjas visada gali laimėti tada ir tik tada, kai $m \neq n$.

Atsakymas: Pradedantis žaidėjas gali laimėti, kai $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, kur $m \neq n$.

`4 (9-10 klasės).` Skaičius

$$\overline{a0a0\ldots a0b0c0c0\ldots c0c}$$

(skaitmenys a ir c parašyti po 1001 kartą) dalijasi iš 37. Įrodykite, kad $b = a + c$.

Sprendimas. Pažymėkime duotąjį skaičių N. Tegul $M = \overline{11\ldots 1}$ yra skaičius, kuriame skaitmuo 1 parašytas 2001 kartą. Skaičius M dalijasi iš 37, nes 111 dalijasi iš 37, o 2001 dalijasi iš 3. Kita vertus, N dalijasi iš 37 tada ir tik tada, kai $11N$ dalijasi iš 37, nes 37 yra pirminis skaičius. Nesunku pastebėti, kad

$$11N = \overline{aa\ldots abbcc\ldots c},$$

kur skaitmenys a ir c yra parašyti po 2002 kartus. Taigi

$$11N = aM10^{2005} + \overline{abbc}10^{2001} + cM.$$

Iš šios išraiškos matome, kad N dalijasi iš 37 tada ir tik tada, kai $\overline{abbc}$ dalijasi iš 37. Kadangi

$$\overline{abbc} = 1000a + 110b + c = 999a + 111b + a - b + c = 37(27a + 3b) + a - b + c$$

ir $|a-b+c| \leqslant 18 < 37$, tai $\overline{abbc}$ dalijasi iš 37 tada ir tik tada, kai $a-b+c=0$, t. y. $b=a+c$. Taigi $37|N \implies b=a+c$.

`5 (11-12 klasės).` Realieji skaičiai a ir b tenkina sąlygą

$$a^3+b^3=8-6ab.$$

Kokias reikšmes gali įgyti $a+b$?

Sprendimas. Pažymėkime $s=a+b$ ir $t=ab$. Tada $a^3+b^3=s^3-3st$. Taigi duotoji sąlyga yra ekvivalenti lygybei

$$s^3-3st-8+6t=s^3-8-3t(s-2)=(s-2)(s^2+2s+4-3t)=0.$$

Vadinasi, galimi du atvejai: $s=a+b=2$ (tada duotąją sąlygą tenkina, pvz., skaičių pora $a=b=1$) ir $s^2+2s+4-3t=0$. Šiuo atveju, įrašę $s=a+b$ ir $t=ab$, gauname

$$0=a^2+2ab+b^2+2a+2b+4-3ab=\frac{1}{2}\big((a-b)^2+(a+2)^2+(b+2)^2\big).$$

Ši lygybė įmanoma su vienintele realiųjų skaičių pora $a=b=-2$. (Ši pora tenkina ir duotąją sąlygą.) Aišku, kad tada $a+b=-4$. Vadinasi, $a+b=2$ arba $a+b=-4$. Be to, abi šios reikšmės tikrai yra įgyjamos.

Atsakymas: 2 ir -4.

`6 (11-12 klasės).` Trikampio ABC pusiaukampinės kertasi taške S. Taškai A_1, B_1, C_1 yra simetriški taškui S atitinkamai tiesių BC, AC ir AB atžvilgiu. Apie trikampį $A_1B_1C_1$ apibrėžtas apskritimas eina per tašką B. Raskite kampą ABC.

Sprendimas. Tarkime, kad į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulys yra lygus r. Žinoma, kad S yra to apskritimo centras. Tegul K yra statmens iš taško S į kraštinę BC pagrindas. Tada $SA_1=2SK=2r$. Analogiškai, $SB_1=SC_1=2r$. Vadinasi, S taip pat yra ir apie trikampį $A_1B_1C_1$ apibrėžto apskritimo centras. Kadangi šis apskritimas eina per tašką B, tai $SB=2r$. Stačiojo trikampio SKB istrižainė $SB=2r$, o statinis $SK=r$, todėl $\angle SBK=30^0$. Kadangi BS yra kampo ABC pusiaukampinė, tai $\angle ABC=2\angle SBK=60^0$.

Atsakymas: $\angle ABC=60^0$.

`7 (11-12 klasės).` Sveikieji skaičiai nuo 1 iki 25 (nebūtinai įprastine tvarka) surašyti ratu. Apskaičiuojamos 25 sumos: pradedant kiekvienu skaičiumi sudedami 5 pagal laikrodžio rodyklę iš eilės einantys skaičiai. Randamos tų sumų dalybos iš 5 liekanos (t. y. vienas iš skaičių $0, 1, 2, 3$ arba 4). Skirtingų liekanų skaičių pažymėkime d.

a) Įrodykite, kad d gali būti lygus $1, 3, 4$ arba 5.

b) Įrodykite, kad d negali būti lygus 2.

Sprendimas. Galime laikyti, jog vietoj kiekvieno skaičiaus k, $1 \leqslant k \leqslant 25$, yra parašyta jo liekana moduliu 5, t. y. vienas iš skaičių $0, 1, 2, 3, 4$. Iš viso turime ratu surašytus 25 skaičius, po penkis $0, 1, 2, 3$ ir 4. Pažymėkime juos (pradedant nuo bet kurio iš jų) pagal laikrodžio rodyklę $a_1, \ldots, a_{25}$. Be to, penkių pagal laikrodžio rodyklę iš eilės einančių skaičių (pradedant nuo a_n) dalybos iš 5 liekaną pažymėkime ℓ_n. Pavyzdžiui,

$$\ell_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} \pmod 5,$$

kai $n = 1, \ldots, 21$. Tada d yra skirtingų aibės $\{\ell_1, \ldots, \ell_{25}\}$ elementų skaičius.

a) Surašykime skaičius taip:

$$0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4.$$

Aišku, kad tada $\ell_1 = \cdots = \ell_{25} = 0$, nes bet kurių penkių taip iš eilės einančių skaičių suma yra $0+1+2+3+4 = 10$, todėl ji dalijasi iš 5. Taigi 0 yra vienintelė liekana, todėl $d = 1$.

Sukeiskime viename iš blokų $0, 1, 2, 3, 4$ (pvz., antrame) 0 ir 1 vietomis:

$$0, 1, 2, 3, 4, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4.$$

Tada $\ell_2 = 1$, $\ell_7 = 4$ ir $\ell_n = 0$, kai $n \neq 2, 7$. Gavome tris skirtingas liekanas $0, 1, 4$, todėl šiuo atveju $d = 3$.

Norėdami gauti keturias skirtingas liekanas, skaičius surašykime taip:

$$0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 0, 2.$$

Matome, kad $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 3$, $\ell_4 = 4$. Be to, $\ell_n \neq 0$, nes (kaip nesunku įsitikinti) jokių penkių iš eilės taip ratu surašytų skaičių suma nesidalija iš 5. Taigi šiuo atveju $d = 4$.

Visas penkias liekanas gauti nesunku. Surašome pirmus 9 skaičius iš eilės taip $0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$, o likusius 16 (dar vieną 1 ir po penkis $2, 3, 4$) surašome bet kuria tvarka. Tada $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$, $\ell_3 = 2$, $\ell_4 = 3$, $\ell_5 = 4$, todėl $d = 5$.

b) Įrodysime, kad kaip besurašytume skaičius ratu skirtingų liekanų skaičius d negali būti lygus 2. Tarkime priešingai, kad, surašę skaičius $a_1, \dots, a_{25}$ ir suskaičiavę atitinkamai $\ell_1, \dots, \ell_{25}$, gavome lygiai 2 skirtingas ℓ_n reikšmes, pvz., u ir v. Čia $u \neq v$ ir $0 \leqslant u, v \leqslant 4$. Kadangi

$$\ell_1 + \ell_6 + \ell_{11} + \ell_{16} + \ell_{21} = a_1 + \cdots + a_{25} \pmod 5,$$

kur $a_1 + \cdots + a_{25} = 5(1+2+3+4)$ dalijasi iš 5, tai $\ell_1 + \ell_6 + \ell_{11} + \ell_{16} + \ell_{21}$ dalijasi iš 5. Jei lygiai t iš liekanų $\ell_1, \ell_6, \ell_{11}, \ell_{16}, \ell_{21}$ yra lygios u, o $5-t$ iš jų yra lygios v, tai $tu + (5-t)v = t(u-v) + 5v$ dalijasi iš 5. Kadangi $u \neq v$, tai įmanoma, tik kai $t = 0$ arba $t = 5$. Vadinasi, $\ell_1 = \ell_6 = \ell_{11} = \ell_{16} = \ell_{21}$. Analogiškai samprotaudami su penketu $\ell_{1+j}, \ell_{6+j}, \ell_{11+j}, \ell_{16+j}, \ell_{21+j}$, kur $0 \leqslant j \leqslant 4$, gauname lygybę

$$\ell_{1+j} = \ell_{6+j} = \ell_{11+j} = \ell_{16+j} = \ell_{21+j} \tag{1}$$

su kiekvienu $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Nagrinėkime surašytas ratu liekanas $\ell_1, \dots, \ell_{25}$, kur $\ell_n \in \{u, v\}$ su kiekvienu $n = 1, \dots, 25$. Iš 25 ratu surašytų skaičių bent du gretimi bus vienodi, sakykime, u ir u. Be to, anksčiau ar vėliau iš karto po u bus ir liekana v, todėl būtinai atsiras trys tokios liekanos iš eilės: u, u, v. Neprarasdami bendrumo, galime laikyti, kad $\ell_1 = \ell_2 = u$, $\ell_3 = v$. Tada iš lygybės (1) išplaukia, kad liekanos $\ell_1, \dots, \ell_{25}$ yra tokios:

$$u, u, v, \ell_4, \ell_5, u, u, v, \ell_4, \ell_5, u, u, v, \ell_4, \ell_5, u, u, v, \ell_4, \ell_5, u, u, v, \ell_4, \ell_5. \tag{2}$$

Kadangi $\ell_1 = \ell_2$, tai $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \pmod 5$, todėl $a_1 = a_6$. Lygiai taip pat iš lygybių $\ell_6 = \ell_7$, $\ell_{11} = \ell_{12}$, $\ell_{16} = \ell_{17}$ (žr. (2)) gauname, kad

$$a_1 = a_6 = a_{11} = a_{16} = a_{21}. \tag{3}$$

Iš

$$v - u = \ell_3 - \ell_2 = a_7 - a_2 \pmod 5$$

išplaukia, kad $a_7 = a_2 + w \pmod 5$, kur $w = v - u$. Analogiškai, naudodamiesi (2) gauname, kad

$$a_{12} = a_7 + w \pmod 5 = a_2 + 2w \pmod 5,$$

$$a_{17} = a_{12} + w \pmod 5 = a_2 + 3w \pmod 5,$$

$$a_{22} = a_{17} + w \pmod 5 = a_2 + 4w \pmod 5.$$

Kadangi $w \neq 0$ ir $|w| \leqslant 4$, tai skaičiai $a_2, a_2 + w, a_2 + 2w, a_2 + 3w, a_2 + 4w$ moduliu 5 yra visi skirtingi. Todėl

$$\{a_2, a_7, a_{12}, a_{17}, a_{22}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}. \tag{4}$$

Pažymėkime $a_1 = a$. Skaičius a yra vienas iš penkių skaičių $0, 1, 2, 3, 4$. Tarp visų a_k, kur $k = 1, \ldots, 25$, jis turi būti sutinkamas lygiai 5 kartus. Tačiau iš (3) išplaukia, kad $a_k = a$, kai $k = 1, 6, 11, 16, 21$ (jau penkios k reikšmės), o iš (4) išplaukia, kad $a_k = a$ dar su vienu (jau šeštu!) natūraliuoju k (kuris yra aibės $\{2, 7, 12, 17, 22\}$ elementas). Prieštara.