59-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Trakai, 2010 03 30
9–10 klasės

1. Įrodykite, kad nelygybė
$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geqslant \frac{a^3b + ab^3}{2}$$
teisinga su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b.

2. Trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės AB ilgis lygus pagrindų AD ir BC ilgių sumai. Įrodykite, kad kampo A pusiaukampinė kraštinę CD dalija pusiau.

3. Žaidimo lenta yra stačiakampis, kurio apatinė kraštinė lygi m, o šoninė – n (m ir n yra natūralieji skaičiai). Stačiakampis padalytas į vienetinius kvadratėlius. Kairiajame apatiniame langelyje stovi šaškė. Du žaidėjai daro ėjimus pakaitomis, ir kiekvienu ėjimu žaidėjas pastumia šaškę į kitą langelį: arba per kiek nori langelių į dešinę, arba per kiek nori langelių į viršų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Nustatykite visas įmanomas natūraliųjų skaičių poras (m, n), su kuriomis žaidimą pradedantis žaidėjas gali laimėti, kad ir kaip žaistų antrasis. Nurodykite, kaip jam reikėtų žaisti.

4. Skaičius
$$\overline{a0a0\ldots a0b0c0c0\ldots c0c}$$
(skaitmenys a ir c parašyti po 1001 kartą) dalijasi iš 37. Įrodykite, kad $b = a + c$.

59-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Trakai, 2010 03 30
11–12 klasės

1. Realieji skaičiai a ir b tenkina sąlygą
$$a^3 + b^3 = 8 - 6ab.$$
Kokias reikšmes gali įgyti $a + b$?

2. Trikampio ABC pusiaukampinės kertasi taške S. Taškai A_1, B_1, C_1 yra simetriški taškui S atitinkamai tiesių BC, AC ir AB atžvilgiu. Apie trikampį $A_1B_1C_1$ apibrėžtas apskritimas eina per tašką B. Raskite kampą ABC.

3. Žaidimo lenta yra stačiakampis, kurio apatinė kraštinė lygi m, o šoninė – n (m ir n yra natūralieji skaičiai). Stačiakampis padalytas į vienetinius kvadratėlius. Kairiajame apatiniame langelyje stovi šaškė. Du žaidėjai daro ėjimus pakaitomis, ir kiekvienu ėjimu žaidėjas pastumia šaškę į kitą langelį: arba per kiek nori langelių į dešinę, arba per kiek nori langelių į viršų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Nustatykite visas įmanomas natūraliųjų skaičių poras (m, n), su kuriomis žaidimą pradedantis žaidėjas gali laimėti, kad ir kaip žaistų antrasis. Nurodykite, kaip jam reikėtų žaisti.

4. Sveikieji skaičiai nuo 1 iki 25 (nebūtinai įprastine tvarka) surašyti ratu. Apskaičiuojamos 25 sumos: pradedant kiekvienu skaičiumi sudedami 5 pagal laikrodžio rodyklę iš eilės einantys skaičiai. Randamos tų sumų dalybos iš 5 liekanos (t. y. vienas iš skaičių $0, 1, 2, 3$ arba 4). Skirtingų liekanų skaičių pažymėkime d.
   a) Įrodykite, kad d gali būti lygus $1, 3, 4$ arba 5.
   b) Įrodykite, kad d negali būti lygus 2.