2011 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas [1]

60-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Šiauliai, 2011 04 19

`1 (9-10 klasės).` Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} (1+4x^2)y = 4z^2, \\ (1+4y^2)z = 4x^2, \\ (1+4z^2)x = 4y^2 \end{cases}$$

sprendinius.

Sprendimas. Jei $x = 0$, tai $y = 0$ (iš trečiosios lygties) ir tada $z = 0$ (iš pirmosios lygties). Analogiškai, jei bent vienas skaičius iš trejeto (x, y, z), tenkinančio lygčių sistemą, yra lygus nuliui, tai tada ir kiti du skaičiai yra lygūs nuliui. Aišku, kad trejetas $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ yra sistemos sprendinys. Tarkime, kad yra dar koks nors lygčių sistemos sprendinys (x, y, z), kur $x, y, z \neq 0$. Tada $x, y, z > 0$. Sudauginę visas tris lygtis ir padaliję iš xyz, gauname lygybę

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) = 64xyz.$$

Iš nelygybės $(2x-1)^2 \geqslant 0$ išplaukia, kad $1+4x^2 \geqslant 4x$, kur lygybė teisinga su vienintele x reikšme $x = 1/2$. Analogiškai, $1+4y^2 \geqslant 4y$ ir $1+4z^2 \geqslant 4z$, taigi $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) \geqslant 64xyz$, kur lygybė galioja tada ir tik tada, kai $x = y = z = 1/2$. Nesunku įsitikinti, kad šis trejetas $(1/2, 1/2, 1/2)$ taip pat yra lygčių sistemos sprendinys, nes $(1+4\cdot(1/2)^2)\cdot(1/2) = 1 = 4\cdot(1/2)^2$.

Atsakymas: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ir $(1/2, 1/2, 1/2)$.

`2 (9-10 klasės).` Atkarpa BD yra trikampio ABC pusiaukraštinė, o atkarpos DE ir DF – trikampių ADB ir CDB pusiaukampinės. Atkarpos EF ir BD kertasi taške M. Raskite atkarpų EF ir MD ilgių santykį.

[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

Sprendimas. Pastebėkime, kad
$$\frac{BE}{EA} = \frac{DB}{DA} = \frac{DB}{DC} = \frac{BF}{FC},$$
todėl atkarpos EF ir AC yra lygiagrečios. Kadangi D yra atkarpos AC vidurio taskas, tai M – atkarpos EF vidurio taškas. Be to,
$$\angle EDF = \angle EDB + \angle BDF = \frac{1}{2}\angle ADB + \frac{1}{2}\angle BDC = \frac{1}{2}180^0 = 90^0.$$
Kadangi stačiojo trikampio EDF pusiaukraštinė DM yra lygi pusei jo įžambinės EF, gauname, kad $EF : MD = 2$.

Atsakymas: $EF : MD = 2$.

`3 (9-12 klasės ir mokytojų olimpiada).` Ant stalo yra 2011 monetų. Du žaidėjai paeiliui ima monetas. Pirmasis gali imti bet kurį nelyginį monetų skaičių nuo 1 iki 99. Antrasis gali imti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Ar gali pirmasis žaidėjas laimėti? Jei taip, tai nurodykite jo strategiją.

Sprendimas. Pirmasis žaidėjas visada gali laimėti žaisdamas taip. Pirmuoju savo ėjimu jis paima 91 monetą. Jei antrasis savo i-tuoju ėjimu paima k_i monetų, tai pirmasis savo $i+1$-uoju ėjimu ima $101 - k_i$ monetų ir taip toliau. (Aišku, kad $101 - k_i$ yra nelyginis skaičius nuo 1 iki 99, kadangi k_i yra lyginis skaičius nuo 2 iki 100.) Po 20 pirmojo ir 19 antrojo žaidėjo ėjimų bus paimta $91 + 19 \cdot 101 = 2010$ monetų. Vadinasi, ant stalo liks viena moneta ir antrasis žaidėjas nebegalės padaryti ėjimo.

Atsakymas: Pirmasis žaidėjas visada gali laimėti.

`4 (9-10 klasės).` Tegul aibę S sudaro tie natūralieji skaičiai n, su kuriais abu skaičiai $3n+1$ ir $10n+1$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai.

a) Nurodykite bent vieną aibės S elementą.

b) Raskite bent vieną $n \in S$, su kuriuo skaičius $30n + 11$ yra sudėtinis.

c) Įrodykite, kad su kiekvienu $n \in S$ skaičius $29n + 11$ yra sudėtinis.

Sprendimas. a) Skaičiai $3n+1$ ir $10n+1$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai, kai, pavyzdžiui, $n = 8$. Tada $3 \cdot 8 + 1 = 5^2$ ir $10 \cdot 8 + 1 = 9^2$. Taigi $8 \in S$. Nesunku įsitikinti, kad tai yra mažiausias aibės S elementas.

b) Jei $n = 8$, tai skaičius $30n + 11 = 30 \cdot 8 + 11 = 251$ yra pirminis. Taigi $n = 8$ netinka. Raskime antrąjį aibės S elementą. Jei $10n + 1 = k^2$, tai k yra $10s + 1$ arba $10s - 1$ su $s \in \mathbb{N}$. Tikriname ar $3n + 1 = \frac{3}{10}(k^2 - 1) + 1$ yra kvadratas, kai $k = 9, 11, 19, 21, 29, 31$. Atvejis $k = 9$ jau išnagrinėtas (tada $n = 8$), o sekanti tinkama reikšmė yra $k = 31$. Tada $n = (31^2 - 1)/10 = 96$ ir $3n + 1 = 3 \cdot 96 + 1 = 289 = 17^2$ yra kvadratas. Vadinasi, 96 yra aibės S elementas. Su šia n reikšme

$$30n + 11 = 30 \cdot 96 + 11 = 2891 = 7 \cdot 413$$

yra sudėtinis skaičius.

c) Tegul $3n + 1 = m^2$ ir $10n + 1 = k^2$ su $m, k \in \mathbb{N}$. Tada

$$(mk)^2 = (3n + 1)(10n + 1) = 30n^2 + 13n + 1.$$

Atėmę iš abiejų lygybės pusių $(n + 1)^2$, gauname

$$(mk)^2 - (n + 1)^2 = 30n^2 + 13n + 1 - (n + 1)^2 = 29n^2 + 11n = n(29n + 11).$$

Vadinasi, skaičius $p = 29n + 11$ dalija sandaugą $(mk - n - 1)(mk + n + 1)$. Tarkime, kad p yra pirminis skaičius. Tada jis dalija bent vieną iš dviejų dauginamųjų $mk-n-1$, $mk+n+1$. Taigi didesnysis dauginamasis, $mk+n+1$, negali būti mažesnis už p. Iš nelygybės $mk + n + 1 \geqslant p = 29n + 11$ išplaukia, kad $mk \geqslant 28n + 10 > 28n$. Tačiau tada

$$44n^2 \geqslant 30n^2 + 13n + 1 = (mk)^2 > (28n)^2 = 784n^2,$$

prieštara. Todėl $p = 29n + 11$ yra sudėtinis skaičius.

Atsakymas: a) pavyzdžiui, $n = 8$; b) pavyzdžiui, $n = 96$.

`5 (11-12 klasės).` Raskite visas tokias funkcijas f, apibrėžtas natūraliųjų skaičių aibėje ir įgyjančias natūraliąsias reikšmes, kad bet kuriems natūraliesiems skaičiams m ir n būtų teisinga lygybė

$$mf(n) + nf(m) = (m + n)f(m^2 + n^2).$$

Sprendimas. Įrodysime, kad $f(n) = f(1)$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, kad taip nėra. Tada egzistuoja bent vienas toks $\ell \in \mathbb{N}$, kad $f(\ell) \neq f(1)$. Iš visų tokių $\ell \in \mathbb{N}$ paimkime kurį nors $k \in \mathbb{N}$, su kuriuo reiškinys $|f(k) - f(1)|$ įgyja mažiausią nenulinę reikšmę, sakykime, $t \in \mathbb{N}$. Įrašę į funkcinę lygtį $m = 1$ ir $n = k$, gauname lygybę $f(k) + kf(1) = (k+1)f(k^2+1)$. Vadinasi,

$$f(k) - f(1) = f(k) + kf(1) - (k+1)f(1) = (k+1)(f(k^2+1) - f(1)).$$

Todėl $f(k^2+1) \neq f(1)$ ir

$$|f(k^2+1) - f(1)| = \frac{|f(k) - f(1)|}{k+1} = \frac{t}{k+1} \leqslant \frac{t}{2} < t,$$

prieštara.

Taigi funkcinę lygtį gali tenkinti tik funkcija $f(n) = s$, kur s yra fiksuotas natūralusis skaičius. Akivaizdu, kad visos tokios funkcijos šią lygtį tenkina:

$$mf(n) + nf(m) = (m+n)s = (m+n)f(m^2+n^2).$$

Atsakymas: $f(n) = s$, kur $s \in \mathbb{N}$.

`6 (11-12 klasės).` Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Tiesė, einanti per tašką B ir lygiagreti tiesei CD, tiesę AC kerta taške M. Tiesė, einanti per tašką C ir lygiagreti tiesei AB, tiesę BD kerta taške N. Įrodykite, kad tiesės MN ir AD yra lygiagrečios arba sutampa.

Sprendimas. Tegul O yra keturkampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo taškas. Kadangi trikampiai OMB ir OCD panašūs, $OM : OC = OB : OD$. Analogiškai, is panašiųjų trikampių OCN ir OAB, gauname $ON : OC = OB : OA$. Padaliję vieną lygybę iš kitos, gauname $OM : ON = OA : OD$. Jei tiesės AB ir CD yra lygiagrečios, tai $A = M$ ir $D = N$, o tada tiesės MN ir AD sutampa. Tarkime, kad tiesės AB ir CD kertasi taške Q. Galimi du atvejai: pirmas, kai taškai A ir D priklauso atitinkamai atkarpoms QB ir QC, ir antras, kai taškai B ir C priklauso atitinkamai atkarpoms QA ir QD. Nesunku įsitikinti, kad pirmuoju atveju taškai A ir D priklauso atkarpoms OM ir ON, o antruoju atveju taškai M ir N priklauso atkarpoms OA ir OD. Iš lygybės $OM : ON = OA : OD$ išplaukia, kad abiem atvejais tiesės MN ir AD atkerta dvi proporcingas kampo AOD kraštines, todėl MN ir AD yra lygiagrečios.

`7 (11-12 klasės).` Tegul $d(n)$ yra natūraliojo skaičiaus n daliklių skaičius (pavyzdžiui, $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(4) = 3$). Natūraliųjų (nebūtinai skirtingų) skaičių rinkinį $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vadiname *tobulu*, jei $d(a_1 + \cdots + a_k) = a_k$ su kiekvienu $k = 1, 2, \ldots, m$.

a) Nurodykite bent vieną tobulą penkių skaičių rinkinį.
b) Raskite visus tobulus penkių skaičių rinkinius.
c) Ar egzistuoja bent vienas tobulas 2011 natūraliųjų skaičių rinkinys?

Sprendimas. a) Tegul $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = a_4 = 6$, $a_5 = 4$. Tada

$$d(a_1) = d(2) = 2 = a_1, \quad d(a_1 + a_2) = d(6) = 4 = a_2,$$

$$d(a_1 + a_2 + a_3) = d(12) = 6 = a_3, \quad d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = d(18) = 6 = a_4,$$

$$d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = d(22) = 4 = a_5.$$

Taigi $2, 4, 6, 6, 4$ yra tobulas penkių skaičių rinkinys.

b) Tegul $g \geqslant 2$ fiksuotas natūralusis skaičius. Aišku, kad visi skaičiaus $n \in \mathbb{N}$ dalikliai neviršija n/g, išskyrus daugiausiai $g - 1$ daliklį, $n, n/2, \ldots, n/(g-1)$ (jei visi šie skaičiai yra sveikieji). Taigi

$$d(n) \leqslant n/g + g - 1.$$

Įrašę $g = 2$, gausime

$$d(n) \leqslant n/2 + 1.$$

Vadinasi, $d(n) < n$, kai $n \geqslant 3$. Kadangi $d(1) = 1$ ir $d(2) = 2$, tai kiekviename tobulame rinkinyje $a_1 = 1$ arba $a_1 = 2$.

Pradėkime nuo atvejo $a_1 = 1$. Įrodysime, kad jokiame tobulame penkių skaičių rinkinyje $a_1 \neq 1$. Tarkime, kad $a_1 = 1$. Norėdami surasti a_2 turime išspręsti lygtį $d(1 + a_2) = a_2$. Raskime kiek bendresnės lygties $d(a + x) = x$ sprendinius, kai a yra koks nors konkretus fiksuotas natūralusis skaičius. (Jų mums prireiks vėliau.) Iš nelygybės

$$x = d(a + x) \leqslant (a + x)/g + g - 1,$$

irašę $g = 2 + [\sqrt{a}]$, gauname, kad

$$x \leqslant \frac{a}{g-1} + g = \frac{a}{1 + [\sqrt{a}]} + 2 + [\sqrt{a}] < 2 + \sqrt{a} + [\sqrt{a}].$$

Patikrinę visus natūraliuosius x nuo 1 iki $2+2[\sqrt{a}]$, sudarome lygties $d(a+x) = x$ natūraliųjų sprendinių lentelę:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	18
$x\ :\ d(a+x) = x$	$2, 3$	4	2	4	2	$3, 4, 6$	$\emptyset$	$\emptyset$	2	4	$2, 4, 5$	6	6	4

Taigi, jei $a_1 = 1$, tai iš $d(1 + a_2) = a_2$ išplaukia, kad $a_2 = 2$ arba $a_2 = 3$. Jei $(a_1, a_2) = (1, 2)$, tai iš $d(3 + a_3) = a_3$ matome, kad $a_3 = 2$. Dabar iš

$d(5+a_4) = a_4$ gauname $a_4 = 2$. Tačiau lygtis $d(1+2+2+2+a_5) = d(7+a_5) = a_5$ natūraliųjų sprendinių neturi, taigi nėra ir tokio tobulo penkių skaičių rinkinio. Kita vertus, jei $(a_1, a_2) = (1, 3)$, tai iš $d(4 + a_3) = a_3$ randame $a_3 = 4$. Lygtis $d(1 + 3 + 4 + a_4) = d(8 + a_4) = a_4$ sprendinių neturi, todėl nėra tobulo keturių (o juo labiau penkių) skaičių rinkinio su $(a_1, a_2) = (1, 3)$.

Nagrinėkime kitą atvejį $a_1 = 2$. Iš lygties $d(2 + a_2) = a_2$ ir lentelės matome, kad $a_2 = 4$. Lygtis $d(6 + a_3) = a_3$ duoda tris galimas a_3 reikšmes $3, 4$ ir 6. Pirmuoju atveju, $(a_1, a_2, a_3) = (2, 4, 3)$, iš $d(9+a_4) = a_4$ gauname $a_4 = 2$, o tada iš $d(11 + a_5) = a_5$ gauname $a_5 = 2, 4, 5$. Visi trys rinkiniai (pirmasis $2, 4, 3, 2, 2$, antrasis $2, 4, 3, 2, 4$ ir trečiasis $2, 4, 3, 2, 5$) pagal šį sprendimo būdą tinka, t. y. jie yra tobuli penkių skaičių rinkiniai. Antruoju atveju, $(a_1, a_2, a_3) = (2, 4, 4)$, turime lygtį $d(10+a_4) = a_4$, taigi $a_4 = 4$. Iš $d(14+a_5) = a_5$ ir lentelės matome, kad $a_5 = 6$. Gavome rinkinį $2, 4, 4, 4, 6$. Trečiuoju atveju, $(a_1, a_2, a_3) = (2, 4, 6)$, iš lentelės gausime $a_4 = 6$, o po to $a_5 = 4$. Aišku, kad abu rinkiniai, $2, 4, 4, 4, 6$ ir $2, 4, 6, 6, 4$, taip pat yra tobuli. Įrodėme, kad yra penki tobuli penkių skaičių rinkiniai ir juos suradome.

c) Įrodysime, kad koks bebūtų $m \in \mathbb{N}$ (pvz., $m = 2011$), egzistuoja tobulas m skaičių rinkinys $a_1, \ldots, a_m$. Iš nelygybės $d(n) \leqslant n/2 + 1$ (žr. b)) gauname

$$d(n) \leqslant n/2 + 1 \leqslant 3n/4,$$

kai $n \geqslant 4$. Be to, $d(3) = 2$, taigi ši nelygybė yra teisinga ir su $n = 3$. Nagrinėkime seką $b_1 = 4^{m-1}$,

$$b_{k+1} = b_k - d(b_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Sekos $k + 1$-asis narys yra natūralusis skaičius, kai $b_k > d(b_k)$. Aišku, kad taip bus, kai $b_k \geqslant 3$, o jei $b_k \in \{1, 2\}$, tai $b_k = d(b_k)$ ir $b_{k+1} = 0$. Tada laikykime, kad $b_j = 0$ su kiekvienu $j \geqslant k + 1$. Kadangi ši seka yra mažėjanti, tai atsiras toks indeksas ℓ, su kuriuo $b_\ell = 1$ arba $b_\ell = 2$. Gausime lygiai ℓ teigiamų sekos narių $b_1 > b_2 > \cdots > b_\ell$, kur $b_\ell \in \{1, 2\}$. Be to, iš nelygybės $d(n) \leqslant 3n/4$ išplaukia, kad

$$b_{k+1} = b_k - d(b_k) \geqslant b_k - 3b_k/4 = b_k/4, \quad \text{kai} \quad k \leqslant \ell - 1,$$

todėl

$$2 \geqslant b_\ell \geqslant \frac{b_{\ell-1}}{4} \geqslant \frac{b_{\ell-2}}{4^2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{b_1}{4^{\ell-1}} = \frac{4^{m-1}}{4^{\ell-1}} = 4^{m-\ell}.$$

Taigi $\ell \geqslant m$.

Pažymėkime

$$a_1 = b_\ell,\ \ a_2 = b_{\ell-1} - b_\ell,\ \ \dots,\ \ a_{\ell-1} = b_2 - b_3 \text{ ir } a_\ell = b_1 - b_2.$$

Tada $a_1 + \dots + a_k = b_{\ell+1-k}$ su kiekvienu $k = 1, \dots, \ell$ ir $d(a_1) = d(b_\ell) = b_\ell = a_1$ bei

$$d(a_1 + \dots + a_k) = d(b_{\ell+1-k}) = b_{\ell+1-k} - b_{\ell+2-k} = a_k$$

su kiekvienu $k = 2, \dots, \ell$. Vadinasi, $a_1, \dots, a_\ell$ yra tobulas natūraliųjų skaičių rinkinys, todėl rinkinys $a_1, \dots, a_m$ (kur $m \leqslant \ell$) taip pat yra tobulas.

Atsakymas: a) pavyzdžiui, 2,4,6,6,4; b) yra penki tokie rinkiniai 2,4,3,2,2; 2,4,3,2,4; 2,4,3,2,5; 2,4,4,4,6; 2,4,6,6,4; c) egzistuoja.

`8 (mokytojų olimpiada).` Įrodykite, kad nelygybė

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{4}{3}(a + b + c)$$

teisinga su bet kuriais realiaisiais skaičiais $a, b, c \geqslant 0$.

Sprendimas. Iš aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybės išplaukia, kad

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2b} \leqslant \frac{a/2 + 2b}{2}$$

ir

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c} \leqslant \frac{a/4 + b + 4c}{3}.$$

Sudėję šias dvi nelygybes ir lygybę $a = a$, gausime

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leqslant a\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + b\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{4c}{3} = \frac{4}{3}(a + b + c).$$

`9 (mokytojų olimpiada).` Ar galima per kurį nors smailiojo kampo viduje esantį tašką nubrėžti tris tieses, kurios kirstų kampo kraštines taip, kad kiekvienoje kampo kraštinėje vienas sankirtos taškas būtų vienodai nutolęs nuo kitų dviejų sankirtos taškų?

Sprendimas. Tarkime, kad per kurį nors kampo viduje esantį tašką O yra nubrėžtos trys tokios tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 taip, kad taškai A, B, C priklauso vienai kampo kraštinei, taškai A_1, B_1, C_1 – kitai, ir, be to, yra teisingos lygybės $AB = BC$ ir $A_1B_1 = B_1C_1$. Pažymėkime $\alpha = \angle AOB = \angle A_1OB_1$ ir $\beta = \angle BOC = \angle B_1OC_1$. Tada

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OA}{\sin\angle ABO} \quad \text{ir} \quad \frac{BC}{\sin\beta} = \frac{OC}{\sin\angle CBO}.$$

Kadangi $AB = BC$ ir $\angle ABO = 180^0 - \angle CBO$, iš šių lygybių išplaukia, kad $OA\sin\alpha = OC\sin\beta$. Analogiškai, $OA_1\sin\alpha = OC_1\sin\beta$. Vadinasi,

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OC}{OC_1}.$$

Gavome, kad trikampio AOC dvi kraštinės yra proporcingos trikampio A_1OC_1 dviems kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs (abu $\alpha + \beta$), taigi trikampiai AOC ir A_1OC_1 yra panašūs. Todėl $\angle OCA = \angle OC_1A_1$ ir tiesės AC ir A_1C_1 (smailiojo kampo kraštinės) yra lygiagrečios, prieštara.

Atsakymas: negalima.