60-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Šiauliai, 2011 04 19
9–10 klasės

1. Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} (1+4x^2)y = 4z^2, \\ (1+4y^2)z = 4x^2, \\ (1+4z^2)x = 4y^2 \end{cases}$$

sprendinius.

2. Atkarpa BD yra trikampio ABC pusiaukraštinė, o atkarpos DE ir DF – trikampių ADB ir CDB pusiaukampinės. Atkarpos EF ir BD kertasi taške M. Raskite atkarpų EF ir MD ilgių santykį.

3. Ant stalo yra 2011 monetų. Du žaidėjai paeiliui ima monetas. Pirmasis gali imti bet kurį nelyginį monetų skaičių nuo 1 iki 99. Antrasis gali imti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Ar gali pirmasis žaidėjas laimėti? Jei taip, tai nurodykite jo strategiją.

4. Tegul aibę S sudaro tie natūralieji skaičiai n, su kuriais abu skaičiai $3n+1$ ir $10n+1$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai.
   a) Nurodykite bent vieną aibės S elementą.
   b) Raskite bent vieną $n \in S$, su kuriuo skaičius $30n+11$ yra sudėtinis.
   c) Įrodykite, kad su kiekvienu $n \in S$ skaičius $29n+11$ yra sudėtinis.

11–12 klasės

1. Raskite visas tokias funkcijas f, apibrėžtas natūraliųjų skaičių aibėje ir įgyjančias natūraliąsias reikšmes, kad bet kuriems natūraliesiems skaičiams m ir n būtų teisinga lygybė

$$mf(n) + nf(m) = (m+n)f(m^2+n^2).$$

2. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Tiesė, einanti per tašką B ir lygiagreti tiesei CD, tiesę AC kerta taške M. Tiesė, einanti per tašką C ir lygiagreti tiesei AB, tiesę BD kerta taške N. Įrodykite, kad tiesės MN ir AD yra lygiagrečios arba sutampa.

3. Ant stalo yra 2011 monetų. Du žaidėjai paeiliui ima monetas. Pirmasis gali imti bet kurį nelyginį monetų skaičių nuo 1 iki 99. Antrasis gali imti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Ar gali pirmasis žaidėjas laimėti? Jei taip, tai nurodykite jo strategiją.

4. Tegul $d(n)$ yra natūraliojo skaičiaus n daliklių skaičius (pavyzdžiui, $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(4) = 3$). Natūraliųjų (nebūtinai skirtingų) skaičių rinkinį $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vadiname *tobulu*, jei $d(a_1 + \cdots + a_k) = a_k$ su kiekvienu $k = 1, 2, \ldots, m$.
   a) Nurodykite bent vieną tobulą penkių skaičių rinkinį.
   b) Raskite visus tobulus penkių skaičių rinkinius.
   c) Ar egzistuoja bent vienas tobulas 2011 natūraliųjų skaičių rinkinys?

1-oji Lietuvos mokytojų matematikos olimpiada
Šiauliai, 2011 04 19

`Olimpiados rėmėjas dr. Audrius Kačėnas`

1. Įrodykite, kad nelygybė
$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{4}{3}(a + b + c)$$
teisinga su bet kuriais realiaisiais skaičiais $a, b, c \geqslant 0$.

2. Ar galima per kurį nors smailiojo kampo viduje esantį tašką nubrėžti tris tieses, kurios kirstų kampo kraštines taip, kad kiekvienoje kampo kraštinėje vienas sankirtos taškas būtų vienodai nutolęs nuo kitų dviejų sankirtos taškų?

3. Ant stalo yra 2011 monetų. Du žaidėjai paeiliui ima monetas. Pirmasis gali imti bet kurį nelyginį monetų skaičių nuo 1 iki 99. Antrasis gali imti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Ar gali pirmasis žaidėjas laimėti? Jei taip, tai nurodykite jo strategiją.