2012 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas [1]

61-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Utena, 2012 04 02

`1 (9-10 klasės).` Kiek yra tokių sveikųjų skaičių, kuriuos galima išreikšti kaip

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\dots+\frac{99}{a_{99}}+\frac{100}{a_{100}},$$

kur $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ – natūralieji skaičiai?

Sprendimas. Įrodysime, kad su bet kokiu $n \in \mathbb{N}$ visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (ir tik juos) galima išreikšti suma

$$\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{n}{a_n},$$

kur $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Tai akivaizdu, kai $n=1$. Tarkime, kad šis teiginys teisingas su kokiu nors $n=k \in \mathbb{N}$. Aišku, kad visi sveikieji skaičiai, kuriuos galima išreikšti kaip

$$\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{k}{a_k}+\frac{k+1}{a_{k+1}} \tag{1}$$

su $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{N}$, yra natūralieji ir neviršija $1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Įrodysime, kad kiekvieną aibės $\{1, 2, \dots, \frac{(k+1)(k+2)}{2}\}$ elementą galima išreikšti aukščiau nurodytu būdu (1).

Pagal indukcijos prielaidą, bet kurį natūralųjį skaičių $m \in \{1, \dots, \frac{k(k+1)}{2}\}$ galima išreikšti suma $m=\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{k}{a_k}$, kur $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$. Imdami tokią išraišką kuriam nors tokiam m ir $a_{k+1}=1$, prie m pridėsime $k+1$. Taigi visus skaičius $m+k+1$, kur $m \in \{1, \dots, \frac{k(k+1)}{2}\}$, galima išreikšti (1) suma. Taip gauname visus natūraliuosius skaičius nuo $k+2$ iki $\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Analogiškai, pasirinkę $a_{k+1}=k+1$, prie m pridėsime vienetą ir taip gausime

[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

visus natūraliuosius skaičius nuo 2 iki $\frac{k(k+1)}{2}+1$. Kadangi $k \geqslant 1$, tai nesunku įsitikinti, jog aibių

$$\{2,\ldots,\frac{k(k+1)}{2}+1\} \quad \text{ir} \quad \{k+2,\ldots,\frac{(k+1)(k+2)}{2}\}$$

sąjunga yra aibė $\{2,\ldots,\frac{(k+1)(k+2)}{2}\}$. Skaičių 1 taip pat galime išreikšti reikiama suma, pavyzdžiui, kai (1) sumoje pasirenkame

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = 1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Teiginys įrodytas visiems $n \in \mathbb{N}$.

Vadinasi, kai $n = 100$, reikiama suma galima išreikšti visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki $1+2+\cdots+100 = 5050$ (ir tik juos).

Atsakymas: 5050 skaičių.

2 (9-10 klasės). Duotas trikampis ABC, kuriame $AC = 1$ ir $AB = BC$, o atkarpoje AB yra tokie taškai K ir L, kad $\angle KLC = \angle LCK = \frac{1}{2}\angle BCA$. Raskite atkarpos KL ilgį.

Sprendimas. Pažymėkime $\angle BCA = \angle BAC = 2\alpha$. Tada $\angle KLC = \angle LCK = \alpha$ ir $\angle ABC = 180^0 - 4\alpha$. Jeigu taškas L priklauso atkarpai AK, tai

$$\alpha = \angle KLC = 180^0 - \angle ALC = \angle LAC + \angle ACL \geqslant \angle LAC = \angle BAC = 2\alpha,$$

prieštara. Vadinasi, taškas K priklauso atkarpai AL. Tada

$$\angle ACL = 180^0 - \angle LAC - \angle ALC = 180^0 - \angle BAC - \angle KLC = 180^0 - 3\alpha$$

ir $\angle ACK = \angle ACL - \angle KCL = 180^0 - 3\alpha - \alpha = 180^0 - 4\alpha$. Iš trikampio ACK gauname, kad

$$\angle AKC = 180^0 - \angle KAC - \angle ACK = 180^0 - 2\alpha - (180^0 - 4\alpha) = 2\alpha = \angle CAK,$$

taigi šis trikampis yra lygiašonis. Vadinasi, $KC = AC = 1$. Kadangi trikampis CKL taip pat lygiašonis, tai $KL = KC = 1$.

Atsakymas: $KL = 1$.

3 (9-10 klasės). Lentoje užrašyti skaičiai $1, 2, \ldots, 2011, 2012$. Vienu ėjimu galima bet kuriuos du iš jų, a ir b, nutrinti ir vietoje jų parašyti skaičių $a - b$ arba $b - a$. Šis veiksmas kartojamas 2011 kartų, kol lentoje lieka vienas skaičius.

a) Ar gali lentoje likti skaičius 0?
b) Ar gali lentoje likti skaičius 1?
c) Koks didžiausias skaičius gali likti lentoje?

Sprendimas. a) Pakeiskime du gretimus skaičius $2k-1$ ir $2k$, kur k prabėga aibę $\{1, 2, \ldots, 1006\}$, jų skirtumais $2k-(2k-1)=1$. Taip po 1006 ėjimų gausime 1006 vienetus. Keisdami du gretimus vienetus jų skirtumais $1-1=0$, dar po 503 ėjimų gausime 503 nulius. Po to, atlikę dar 502 ėjimus, visada gausime 0.

b) Kadangi skirtumas tarp $a+b$ ir $a-b$ (arba $b-a$) yra lyginis skaičius, tai po kiekvieno ėjimo visų lentoje esančių skaičių sumos lyginumas nepasikeičia. Pradžioje lentoje užrašytų skaičių suma yra lyginis skaičius

$$1+2+\cdots+2012=\frac{2012\cdot 2013}{2}=2025078,$$

todėl nelyginis skaičius 1 po 2011 ėjimų likti negali.

c) Po pirmojo ėjimo visų lentoje užrasytų skaičių modulių suma sumažės bent 2, kadangi

$$|a|+|b|-|a-b|=a+b-\max(a,b)+\min(a,b)=2\min(a,b)\geqslant 2.$$

Po to ši modulių suma nedidės, nes $|a|+|b|\geqslant|a-b|=|b-a|$ su bet kokiais a, b. Taigi pabaigoje liekančio skaičiaus modulis (o tuo pačiu ir pats skaičius) neviršija

$$1+2+\cdots+2012-2=2025076.$$

Įrodysime, kad šį skaičių po 2011 ėjimų gauti galima. Pirmuoju ėjimu skaičių porą $1, 2$ keičiame skaičiumi -1. Antruoju ėjimu porą $-1, 3$ keičiame skaičiumi $-1-3=-4$, po to vietoje $-4, 4$ rašome -8 ir t. t. vis atimam antrąjį skaičių iš pirmojo. Po k tokių ėjimų, kur $1\leqslant k\leqslant 2010$, pirmasis skaičius bus lygus

$$2-(1+2+\cdots+k+(k+1)).$$

Vadinasi, po 2010 ėjimų liks pora $2-(1+2+\cdots+2011), 2012$. Tada paskutiniuoju ėjimu iš antrojo skaičiaus atimame pirmąjį. Lentoje liks skaičius

$$2012-2+(1+2+\cdots+2011)=1+2+\cdots+2012-2=2025076.$$

Atsakymas: a) gali likti; b) negali likti; c) 2025076.

`4 (9-12 klasės).` Natūralusis skaičius n yra vadinamas *mandagiu*, jeigu jį galima išreikšti kaip

$$n = s + (s+1) + \cdots + (t-1) + t,$$

kur $s < t$ – natūralieji skaičiai. Pavyzdžiui, skaičius 18 yra mandagus, nes $18 = 5 + 6 + 7$.

a) Ar skaičius 2012 yra mandagus?
b) Ar skaičius 2048 yra mandagus?
c) Raskite visus mandagiuosius skaičius.

Sprendimas. a) Kadangi

$$2012 = 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255,$$

tai skaičius 2012 yra mandagus.

b) Įrodysime, kad bet kuris skaičius 2^k, kur $k = 0, 1, 2, \ldots$ (tarp jų ir skaičius $2048 = 2^{11}$), nėra mandagus. Tarkime, kad

$$2^k = s + (s+1) + \cdots + (t-1) + t = \frac{t(t+1)}{2} - \frac{(s-1)s}{2} = \frac{(t-s+1)(t+s)}{2}.$$

Tada

$$(t+s)(t-s+1) = 2^{k+1}. \tag{2}$$

Kadangi skaičių $t + s \geqslant 2$ ir $t - s + 1 \geqslant 2$ skirtumas $2s - 1$ yra nelyginis skaičius, tai vienas iš jų yra nelyginis ir turi nelyginį pirminį daliklį p, didesnį už 1. Tačiau jų sandauga 2^{k+1} iš p nesidalija, prieštara.

c) Įrodysime, kad bet kuris kitas natūralusis skaičius n, išskyrus visus skaičius 2^k, kur $k = 0, 1, 2, \ldots$, yra mandagus. Tokį skaičių n galima išreikšti kaip $n = m2^k$, kur $m > 1$ yra nelyginis ir $k \geqslant 0$. Analogiškai, kaip ir (2) lygybėje, matome, kad skaičius $m2^k$ yra mandagus, jeigu

$$(t+s)(t-s+1) = m2^{k+1} \tag{3}$$

su kokiais nors natūraliaisiais skaičiais s ir t, kur $s < t$. Nesunku įsitikinti, kad (3) lygtis visada turi reikiamą sprendinį. Jei $m \geqslant 2^{k+1}$, tai $m > 2^{k+1}$ ir (3) lygybė galioja su natūraliaisiais skaičiais $s = (m - 2^{k+1} + 1)/2$ ir $t = (m + 2^{k+1} - 1)/2 > s$. Kita vertus, jei $3 \leqslant m < 2^{k+1}$, tai (3) lygybė galioja su natūraliaisiais skaičiais $s = (2^{k+1} - m + 1)/2$ ir $t = (2^{k+1} + m - 1)/2 > s$.

Atsakymas: a) skaičius 2012 yra mandagus; b) skaičius 2048 nėra mandagus; c) visi natūralieji skaičiai, išskyrus 2^k, kur $k = 0, 1, 2, \ldots$.

`5 (11-12 klasės).` Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2, \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30, \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16. \end{cases}$$

Sprendimas. Duotoji lygčių sistema yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2) - 2xyz = 2, \\ y(x^2+y^2+z^2) - 2xyz = 30, \\ z(x^2+y^2+z^2) - 2xyz = 16. \end{cases}$$

Sudėję dvi pirmas lygtis ir atėmę trečiąją, padaugintą iš 2, gauname

$$(x+y-2z)(x^2+y^2+z^2) = 2+30-2\cdot 16 = 0.$$

Taigi $x^2+y^2+z^2=0$ arba $z=(x+y)/2$. Pirmuoju atveju, $x=y=z=0$, tačiau šis trejetas nėra lygčių sistemos sprendinys. (Be to, iš lygčių sistemos matome, kad nei vienas iš skaičių x, y, z negali būti lygus 0.) Vadinasi, bet kuriam lygčių sistemos sprendiniui (x, y, z) galioja antroji lygybė $z=(x+y)/2$. Iš pirmosios lygties (padauginę ją iš 4 ir įrašę $2z = x+y$) gauname

$$x(5x^2+5y^2+2xy) - 4xy(x+y) = 8,$$

o iš antrosios lygiai taip pat

$$y(5x^2+5y^2+2xy) - 4xy(x+y) = 120.$$

Padauginkime pirmąją lygybę iš 15 ir atimkime antrąją:

$$\begin{aligned} 0 = 15\cdot 8 - 120 &= (15x-y)(5x^2+5y^2+2xy) - 60xy(x+y) + 4xy(x+y) = \\ &= 75x^3 - 5x^2y + 75xy^2 - 5y^3 + 30x^2y - 2xy^2 - 56x^2y - 56xy^2 = \\ &= 75x^3 - 31x^2y + 17xy^2 - 5y^3 = x^3(75 - 31t + 17t^2 - 5t^3), \end{aligned}$$

kur $t = y/x$ (ir, kaip jau žinome, $x \neq 0$). Kadangi

$$75 - 31t + 17t^2 - 5t^3 = (3-t)(5t^2 - 2t + 25) = 0,$$

tai $t=3$ arba $5t^2-2t+25=0$. Pastaroji lygtis realiųjų šaknų neturi, nes kvadratinio trinario diskriminantas yra neigiamas. Vadinasi, $t=3$. Taigi $y = tx = 3x$ ir $z = (x+y)/2 = 2x$. Dabar iš pirmosios lygčių sistemos lygties gauname

$$2 = x^3 + x(y-z)^2 = x^3 + x(3x-2x)^2 = x^3 + x^3 = 2x^3.$$

Vadinasi, $x^3 = 1$ ir todėl $x = 1$, $y = 3x = 3$ bei $z = 2x = 2$. Nesunku įsitikinti, kad šis trejetas $(x, y, z) = (1, 3, 2)$ tenkina lygčių sistemą.

Atsakymas: $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

`6 (11-12 klasės).` Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle ACB = 90^0$ ir $\angle BAC = 30^0$. Taškas E yra įbrėžto į jį apskritimo centras, o taškas D – atkarpos BE ir to apskritimo susikirtimo taškas. Raskite kampą tarp tiesių AE ir CD.

Sprendimas. Sakykime, kad įbrėžtas į ABC apskritimas (kurio spindulys r) liečia kraštines AC ir BC atitinkamai taškuose H ir F. Tada $HEFC$ yra kvadratas, kurio kraštinės lygios r. Įrodysime, kad $FD = r$.

Kadangi BE yra kampo CBA pusiaukampinė, iš stačiojo trikampio EFB gauname

$$\angle FEB = 90^0 - \angle FBE = 90^0 - \frac{1}{2}\angle CBA = 90^0 - \frac{1}{2}\big(90^0 - \angle BAC\big) = 60^0.$$

Trikampis FED yra lygiašonis, nes $EF = ED = r$. Kadangi

$$\angle EFD = \angle FDE = \frac{1}{2}\big(180^0 - \angle FED\big) = \frac{1}{2}\big(180^0 - \angle FEB\big) = 60^0,$$

tai FED yra lygiakraštis trikampis, todėl $FD = r$.

Iš $CF = EF = FD = r$ išplaukia, kad trikampis CFD yra lygiašonis. Kadangi $\angle DFB = 90^0 - \angle EFD = 90^0 - 60^0 = 30^0$, tai $\angle CFD = 180^0 - \angle DFB = 150^0$. Vadinasi, $\angle FCD = \angle CDF = \frac{1}{2}(180^0 - 150^0) = 15^0$. Taigi kampas tarp tiesių CB ir CD yra 15^0. Kadangi AE yra kampo CAB pusiaukampinė, o $\angle CAB = 30^0$, tai kampas tarp tiesių AC ir AE taip pat yra 15^0. Tiesės AC ir CB yra statmenos. Taigi tiesės AE ir CD, kurios gaunamos sukant tieses AC ir CB atitinkamai taškų A ir C atžvilgiu 15^0 kampu ta pačia kryptimi, taip pat yra statmenos, todėl kampas tarp jų yra 90^0.

Atsakymas: 90^0.

`7 (11-12 klasės).` Lentoje užrašytą sveikųjų skaičių seką $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, kur $n \geqslant 2$, leidžiama nutrinti ir užrašyti naują seką

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|.$$

Su gautąja seka vėl leidžiama atlikti tokią pačią operaciją. Skaičius n vadinamas *piktu*, jei iš bet kokios pradinės sekos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ po baigtinio operacijų skaičiaus gaunama seka $0, 0, \ldots, 0, 0$.

a) Įrodykite, kad bet kuris nelyginis skaičius n, kur $n > 1$, nėra piktas.
b) Ar skaičius 4 yra piktas?
c) Ar skaičius 6 yra piktas?

Sprendimas. a) Imkime tokią pradinę seką: $1, 1, 0, \ldots, 0$. Aišku, kad po kiekvienos operacijos mes gausime seką, kurią sudaro tik nuliai ir vienetai. Be to, jeigu galima gauti seką $0, 0, \ldots, 0$, tai prieš ją turėjo būti seka $1, 1, \ldots, 1$. Visų skaičių suma $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_n - a_1|$ moduliu 2 yra lygi

$$a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n - a_1 = 0,$$

todėl ši suma visada yra lyginis skaičius. Taigi po kiekvienos operacijos bus lyginis skaičius vienetų, o likę skaičiai nuliai. Vadinasi, kai $n > 1$ yra nelyginis, mes niekada negausime sekos $1, 1, \ldots, 1$, o tuo pačiu ir sekos $0, 0, \ldots, 0$.

Galime laikyti, kad seka $a_1, \ldots, a_n$ yra užrašyta ratu, todėl, pavyzdžiui, sekos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ir $a_3, a_4, a_5, a_6, a_1, a_2$ (kurią gauname perkeliant kelis skaičius iš galo į priekį) yra vienodos. Nesunku įsitikinti, kad atsakymas į klausimą c) yra neigiamas. Pradėkime nuo sekos $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Atlikę su ja vieną operaciją, gausime seką $1, 1, 1, 0, 0, 1$, o po to $0, 0, 1, 0, 1, 0$, taigi po dviejų operacijų gavome pradinę seką. Šis procesas periodiškai kartosis ir sekos $0, 0, 0, 0, 0, 0$ mes niekada negausime.

Įrodysime, kad atsakymas į b) dalį yra teigiamas. Akivaizdu, jog atlikus bent vieną operaciją, visi lentoje užrašyti skaičiai bus neneigiami. Taigi, kad ir kokie bebūtų pradiniai skaičiai a_1, a_2, a_3, a_4, po $k \geqslant 1$ operacijų visi skaičiai bus sveikieji ir neneigiami. Tegul M_k yra didžiausias iš jų. Aišku, kad

$$M_k \leqslant M_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant M_1 = \max(|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|, |a_4 - a_1|). \quad (4)$$

Įrodysime, kad skaičius 4 yra piktas, t. y. po baigtinio skaičiaus operacijų gausime seką $0, 0, 0, 0$. (Taip bus, kai $M_k = 0$ su kuriuo nors $k \in \mathbb{N}$.)

Iš pradžių įrodysime, kad po $4m$ operacijų visi keturi skaičiai dalijasi iš 2^m. Tegul $m = 1$. Skaičiuodami moduliu 2, iš pradinės sekos a_1, a_2, a_3, a_4 gauname

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \mapsto a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1 \mapsto a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_1 + a_3, a_2 + a_4.$$

Po to gausime visas keturias liekanas lygias $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, o dar po vienos, ketvirtosios, operacijos visos liekanos moduliu 2 bus lygios 0. Teiginys įrodytas, kai $m = 1$. Sakykime, kad jis teisingas, kai $m = s$, t. y. po $4s$ operacijų visi keturi skaičiai dalijasi iš 2^s. Pažymėkime tuos skaičius $2^s b_1, 2^s b_2, 2^s b_3, 2^s b_4$, kur b_1, b_2, b_3, b_4 yra sveikieji neneigiami skaičiai. Kadangi po 4 operacijų su skaičiais b_1, b_2, b_3, b_4 mes gausime lyginių skaičių ketvertą (žr. atvejį su $m = 1$), tai, remiantis indukcijos prielaida, po $4s + 4 = 4(s + 1)$ operacijų su skaičiais a_1, a_2, a_3, a_4 gausime ketvertą, kuriame visi skaičiai dalijasi iš $2^s \cdot 2 = 2^{s+1}$. Teiginys įrodytas.

Remiantis teiginiu, M_{4m} dalijasi iš 2^m su kiekvienu $m \in \mathbb{N}$. Parinkime tokį $k \in \mathbb{N}$, kad $2^k > M_1$. Kadangi sveikas neneigiamas skaičius M_{4k} dalijasi iš 2^k ir yra mažesnis už 2^k (žr. (4)), tai $M_{4k} = 0$ ir po $4k$ operacijų tikrai gausime seką $0, 0, 0, 0$.

Atsakymas: b) skaičius 4 yra piktas; c) skaičius 6 nėra piktas.