2013 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

62-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Raseiniai, 2013 03 26

1 (9-10 klasės). Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 2z^4 = 18, \\ x + 2y + 2z^2 = 40, \\ z^4 - 2xy = 9. \end{cases}$$

Sprendimas. Duotoji lygčių sistema yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2z^4 + 18, \\ x + 2y = 40 - 2z^2, \\ 2xy = z^4 - 9. \end{cases}$$

Kadangi $(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy$, tai, pakėlę abi antrosios lygties puses kvadratu ir iš jos atėmę pirmąją lygtį bei trečiąją lygtį, padaugintą iš 2, gausime:

$$\begin{aligned} 0 &= (40 - 2z^2)^2 - 2z^4 - 18 - 2z^4 + 18 = 1600 - 160z^2 + 4z^4 - 4z^4 = \\ &= 1600 - 160z^2 = 160(10 - z^2). \end{aligned}$$

Vadinasi, $z = \pm\sqrt{10}$. Dabar iš antrosios ir trečiosios lygčių gauname $x+2y = 20$ ir $2xy = 91$. Įrašę $2y = 20 - x$ į pastarąją lygybę, gausime $x(20 - x) = 91$, t. y. $x^2 - 20x + 91 = (x - 7)(x - 13) = 0$. Todėl $x = 7$ arba $x = 13$. Iš lygybės $y = 10 - \frac{x}{2}$ gauname atitinkamas y reikšmes: $y = \frac{13}{2}$ ir $y = \frac{7}{2}$. Taigi galimi tik keturi sprendinių trejetai: $(x, y, z) = (7, \frac{13}{2}, \sqrt{10})$, $(7, \frac{13}{2}, -\sqrt{10})$, $(13, \frac{7}{2}, \sqrt{10})$ ir $(13, \frac{7}{2}, -\sqrt{10})$. Nesunku įsitikinti (patikrinant), kad visi šie keturi trejetai tenkina lygčių sistemą.

Atsakymas: $(x, y, z) = (7, \frac{13}{2}, \sqrt{10})$, $(7, \frac{13}{2}, -\sqrt{10})$, $(13, \frac{7}{2}, \sqrt{10})$ ir $(13, \frac{7}{2}, -\sqrt{10})$.

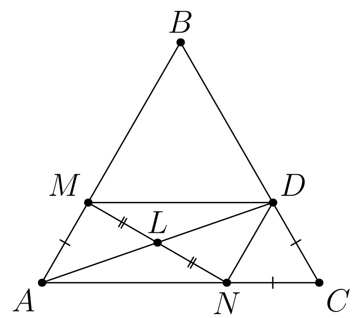
[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/

2 (9-10 klasės). Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra pažymėti taškai atitinkamai M ir N.

a) Raskite AL, jei L yra atkarpos MN vidurio taškas, $BN = 7$ ir $AM = NC$.

b) Įrodykite, kad tiesės MN ir AC yra statmenos, jei $BN = 7$ ir $AM = NC = 2\sqrt{7}$.

Sprendimas. a) *Pirmas būdas.* Tegul D yra toks taškas kraštinėje BC, kad $AM = NC = CD$ (žr. brėžinį[2]).



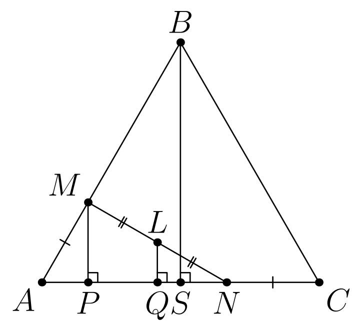
Tada $\angle DNC = \frac{1}{2}(180^0 - \angle NCD) = 60^0$, todėl trikampis NDC yra lygiakraštis. Taigi $ND = NC = AM$. Be to, atkarpos ND ir AM – lygiagrečios, nes $\angle BAC = 60^0$, o tai reiškia, kad $AMDN$ – lygiagretainis. Jo įstrižainių MN ir AD susikirtimo taškas dalija jas pusiau, todėl jos kertasi taške L (kuris yra atkarpos MN vidurio taškas) ir $AD = 2AL$. Be to, $ABDN$ – lygiašonė trapecija, todėl $AD = BN$. Vadinasi, $AL = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BN = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

Antras būdas. Tegul P, Q ir S yra statmenų, nuleistų iš taškų M, L ir B į kraštinę AC, pagrindai. Pažymėkime trikampio ABC kraštinės ilgį a ir $AM = NC = x$. Tada $SC = \frac{a}{2}$ (atkarpa SC yra trikampio ABC aukštinė ir pusiaukraštinė) ir $BS^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3a^2}{4}$. Be to, $SN = SC - NC = \frac{a}{2} - x$, kai $x \leqslant \frac{a}{2}$ ir $SN = AS - AN = \frac{a}{2} - (a - x) = x - \frac{a}{2}$, kai $x > \frac{a}{2}$ (žr. abu brėžinius žemiau). Abiem atvejais $SN^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$, todėl

$$BN^2 = BS^2 + SN^2 = \frac{3a^2}{4} + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - ax + x^2.$$

Kadangi $AP = \frac{x}{2}$ (stačiojo trikampio AMP statinis prieš 30^0 kampą), tai $MP = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$. Todėl $LQ = \frac{1}{2}MP = \frac{\sqrt{3}x}{4}$. Aišku, kad

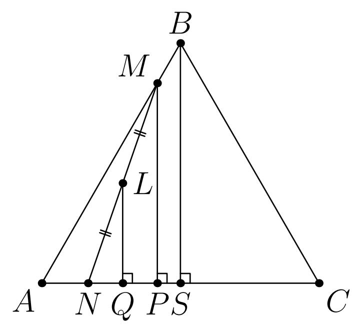
[2] Už visus brėžinius autorius dėkoja Pauliui Šarkai



taškai P ir Q priklauso atkarpai AN, kai $\frac{x}{2} + x \leqslant a$, t. y. $x \leqslant \frac{2a}{3}$. Tada $PQ = \frac{1}{2}PN = \frac{1}{2}(a - \frac{x}{2} - x) = \frac{a}{2} - \frac{3x}{4}$ ir

$$AQ = AP + PQ = \frac{x}{2} + \frac{a}{2} - \frac{3x}{4} = \frac{2a - x}{4}.$$

Kai $x > \frac{2a}{3}$, tai taškai N ir Q priklauso atkarpai AP.



Tada $PQ = \frac{1}{2}PN = \frac{1}{2}(\frac{x}{2} + x - a) = \frac{3x}{4} - \frac{a}{2}$ ir $AQ = AP - PQ = \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} + \frac{a}{2} = \frac{2a-x}{4}$. Vadinasi, abiem atvejais gauname lygybę

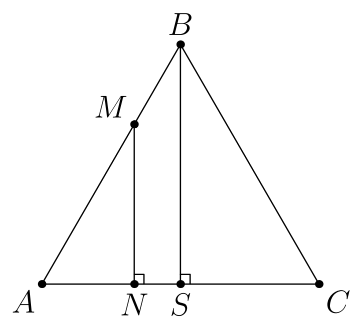
$$AL^2 = AQ^2 + LQ^2 = \left(\frac{2a - x}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{4}\right)^2 = \frac{a^2 - ax + x^2}{4} = \frac{BN^2}{4}.$$

Iš jos išplaukia, kad $AL = \frac{1}{2}BN = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

b) *Pirmas būdas.* Tegul P ir Q yra statmenų, nuleistų iš taškų M ir L į kraštinę AC, pagrindai. Įrodysime, kad $AP = AQ$. Tada taškai P, Q (o tuo pačiu ir N) sutampa, todėl tiesė MN yra stamena tiesei AC. Iš tikrųjų, $AP = \frac{1}{2}AM = \sqrt{7}$ (stačiojo trikampio AMP statinis prieš 30^0 kampą) ir $MP = \sqrt{AM^2 - AP^2} = \sqrt{28 - 7} = \sqrt{21}$, todėl $LQ = \frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}\sqrt{21}$. Kadangi $AL = \frac{7}{2}$ (uždavinio a) dalis), tai

$$AQ = \sqrt{AL^2 - LQ^2} = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{21}{4}} = \sqrt{7} = AP.$$

Antras būdas. Tegul P yra statmens, nuleisto iš taško M į kraštinę AC, pagrindas. Tada $AP = \frac{1}{2}AM = \frac{x}{2} = \sqrt{7}$, kur $x = 2\sqrt{7}$. Akivaizdu, kad tiesės MN ir AC yra statmenos tada ir tik tada, kai taškas P sutampa su tašku N (žr. brėžinį). Įrodysime, kad taip ir yra, t. y. $AN = \sqrt{7}$. Pažymėkime $AN = y$. Kadangi $BS^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, kur $a = AC = AN + NC = y + x$ yra lygiakraščio trikampio ABC kraštinė, ir



$NS = NC - SC = x - \frac{a}{2}$, tai iš stačiojo trikampio NSB gauname, kad

$$BN^2 = BS^2 + NS^2 = \frac{3a^2}{4} + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = a^2 - ax + x^2 =$$
$$= (x+y)^2 - (x+y)x + x^2 = x^2 + xy + y^2.$$

Įrašę $BN = 7$ ir $x = 2\sqrt{7}$, gausime

$$y^2 + 2\sqrt{7}y - 21 = (y + 3\sqrt{7})(y - \sqrt{7}) = 0.$$

Kadangi $y > 0$, tai $y = \sqrt{7}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Atsakymas: a) $AL = 3{,}5$.

3 (9-10 klasės). Lentoje surašyti visi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 64. Pradedantysis žaidėjas A pasirenka vieną iš jų ir įrašo į bet kurį lentelės 8×8 langelį. Tada žaidėjas B vieną iš likusių skaičių įrašo į bet kurį laisvą lentelės langelį. Taip pakaitomis jie užpildo visą lentelę. Dabar kiekviename stulpelyje išrenkamas mažiausias skaičius, ir apskaičiuojama visų tų 8 skaičių suma S.

a) Nurodykite, kaip turi žaisti žaidėjas B, kad skaičius S būtų lyginis, nors ir kaip žaistų jo priešininkas.

b) Nurodykite, kaip turi žaisti žaidėjas B, kad skaičius S būtų nelyginis, nors ir kaip žaistų jo priešininkas.

Sprendimas. a) Suskirstykime visus 64 skaičius į poras taip:

$$(1,2),(3,4),(5,6),\ldots,(63,64).$$

Žaidėjas B visada gali žaisti taip. Žaidėjui A pasirinkus bet kurį skaičių ir jį įrašius į lentelę, B visada ima kitą tos pačios poros skaičių ir jį įrašo į tą patį stulpelį. Aišku, kad B visada galės padaryti tokį ėjimą, kadangi po kiekvieno B ėjimo likusių laisvų langelių skaičius kiekviename stulpelyje yra lyginis. Kadangi abu kiekvienos poros skaičiai pateks į tą patį stulpelį, o mažesnysis iš jų yra nelyginis, tai po visų ėjimų pats mažiausias skaičius kiekviename stulpelyje bus nelyginis. Taigi S bus 8 nelyginių skaičių suma, todėl S – lyginis skaičius.

b) Dabar suskirstykime visus 64 skaičius į poras taip:

$$(1,64),(2,3),(4,5),\ldots,(62,63).$$

Žaidėjas B visada gali žaisti taip, kaip nurodyta a) dalyje. Kadangi abu kiekvienos poros skaičiai pateks į tą patį stulpelį, tai po visų ėjimų pats mažiausias skaičius 7 stulpeliuose bus lyginis, o viename (tame, į kurį pateks skaičiai 1 ir 64) – nelyginis. Jų suma S tada bus 7 lyginių skaičių ir vieno nelyginio skaičiaus suma, todėl S – nelyginis skaičius.

4 (9-10 klasės). Pažymėkime skaičių, kurio dešimtainiame užraše yra n devynetų, simboliu $d_n = 9\cdots 99$.

a) Raskite bent vieną skaičiaus $d_3 = 999$ kartotinį, kuriame nėra skaitmens 9.
b) Raskite mažiausią tokį skaičiaus $d_3 = 999$ kartotinį.
c) Raskite mažiausią tokį skaičiaus $d_n = 9\cdots 99$ kartotinį, kuriame nėra skaitmens 9.

Sprendimas. Skaičių $1\cdots 11$, sudarytą iš n vienetų, pažymėkime v_n. Tada $d_n = 9v_n$ ir $d_n = 10^n - 1$. Tarkime, kad skaičius $D = \overline{BA} = 10^n B + A$, turintis ne daugiau kaip $2n$ skaitmenų, dalijasi iš d_n ir joks jo skaitmuo nėra lygus 9. Čia $B = \overline{j_n \cdots j_2 j_1}$ ir $A = \overline{i_n \cdots i_2 i_1}$, kur $j_n,\ldots,j_2,j_1,i_n,\ldots,i_2,i_1 \in \{0,1,\ldots,8\}$. Kadangi

$$D = 10^n B + A = (d_n+1)B + A = d_n B + B + A,$$

tai D dalijasi iš d_n tada ir tik tada, kai $B + A$ dalijasi iš d_n. Be to, B ir A neviršija $8v_n$, todėl $B + A \leqslant 16v_n < 2d_n$. Taigi $B + A$ dalijasi iš d_n tada ir tik tada, kai $B + A = d_n$. Iš čia matome, kad skaičiai 444555 ir 123876 dalijasi iš $d_3 = 999$, nes $444 + 555 = 123 + 876 = 999$.

Nurodysime mažiausią d_n kartotinį su reikiama savybe. Kadangi $j_1 + i_1$ baigiasi 9 ir $j_1, i_1 \leqslant 8$, tai $j_1 + i_1 = 9$. Analogiškai, gauname, kad $j_2 + i_2 = 9$ ir t. t. Taigi $j_s + i_s = 9$ su kiekvienu $s = 1, \dots, n$. Iš nelygybės $i_s \leqslant 8$ išplaukia, kad $j_s = 9 - i_s \geqslant 1$. Skaičius $D = \overline{j_n \cdots j_2 j_1 i_n \cdots i_2 i_1}$ bus pats mažiausias, kai skaitmenys $j_n, \dots, j_2, j_1$ bus mažiausi, t. y. $j_1 = j_2 = \cdots = j_n = 1$, o tada $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = 8$. Taigi, kad ir koks būtų natūralusis skaičius n, mažiausias skaičiaus d_n kartotinis be devynetų yra skaičius $1 \cdots 118 \cdots 88$, sudarytas iš n vienetų ir n aštuonetų.

Atsakymas: a) pavyzdžiui, skaičiai 444555 ir 123876; b) 111888; c) skaičius $1 \cdots 118 \cdots 88$, sudarytas iš n vienetų ir n aštuonetų.

5 (11-12 klasės). Realieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą

$$ac + bc + c^2 < a + b + c.$$

Įrodykite, kad

$$4bc + 4c < a^2 + 4b + 4.$$

Sprendimas. Pirmas būdas. Perrašome sąlygą $(a+b+c)(c-1) < 0$ ir nelygybę, kurią reikia įrodyti, $a^2 > 4(b+1)(c-1)$.

Nagrinėkime kvadratinį trinarį $f(x) = x^2 + ax + (b+1)(c-1)$. Taške $x = c-1$ kvadratinis trinaris įgyja neigiamą reikšmę, nes

$$f(c-1) = (c-1)^2 + a(c-1) + (b+1)(c-1) = (c-1)(a+b+c) < 0.$$

Vadinasi, f turi dvi skirtingas realiąsias šaknis. Taigi f diskriminantas, t. y. reiškinys $a^2 - 4(b+1)(c-1)$, yra teigiamas.

Antras būdas. Pažymėkime $b+1 = u$ ir $c-1 = v$. Įrodysime, kad iš nelygybės $(a+u+v)v < 0$ išplaukia nelygybė $a^2 > 4uv$.

Aišku, kad $v \neq 0$. Jei $u = 0$, tai $(a+v)v < 0$. Tada $a \neq 0$ ir reikiama nelygybė $a^2 > 4uv = 0$ galioja. Tegul $u \neq 0$. Akivaizdu, kad reikama nelygybė $a^2 > 4uv$ yra teisinga, jei skaičiai u ir v yra skirtingų ženklų. Įrodysime nelygybę, kai jie abu yra vienodų ženklų, t. y. $u, v > 0$ arba $u, v < 0$.

Pirmuoju atveju, $u, v > 0$, turime $a+u+v < 0$. Vadinasi, $u+v < -a$. Kairioji nelygybės pusė yra teigiama, todėl ir dešinioji turi būti teigiama. Pakėlę abi puses kvadratu, gausime

$$a^2 = (-a)^2 > (u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 4uv + (u-v)^2 \geqslant 4uv,$$

ką ir reikėjo įrodyti. Antruoju atveju, $u, v < 0$, gauname $a + u + v > 0$. Tada $a > -u - v$. Abi šios nelygybės pusės yra teigiamos, todėl vėl galime pakelti abi puses kvadratu: $a^2 > (-u-v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 4uv + (u-v)^2 \geqslant 4uv$.

Trečias būdas.[3] Iš tapatybės

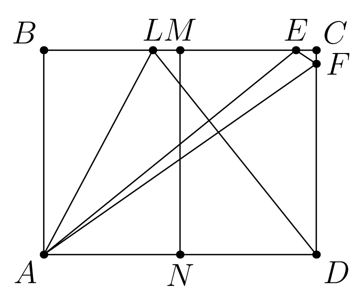
$$a^2 - 4(b+1)(c-1) = (a+2c-2)^2 - 4(a+b+c)(c-1)$$

ir uždavinio sąlygos matome, kad jos dešinioji pusė teigiama, todėl ir kairioji pusė turi būti teigiama.

6 (11-12 klasės). Iš stačiakampio popieriaus lapo 4×3 iškerpamas trikampis, kurio kraštinių ilgiai $d > v > m$.

a) Kokias reikšmes gali įgyti d?
b) Kokias reikšmes gali įgyti v?
c) Kokias reikšmes gali įgyti m?

Sprendimas. Aišku, kad jei iš lapo galima iškirpti trikampį, kurio kraštinės $d > v > m$, tai galima iškirpti ir trikampį, kurio kraštinės $\lambda d > \lambda v > \lambda m$, kur λ yra bet koks skaičius intervale $(0, 1]$. Vadinasi, jei kuris nors iš kraštinių ilgių (d, v arba m) įgyja reikšmę r, tai jis įgyja ir bet kurią reikšmę intervale $(0, r]$. Sakykime, kad stačiakampio kraštinės AD ir AB yra lygios atitinkamai 4 ir 3, o M ir N yra kraštinių BC ir AD vidurio taškai. Aišku, kad $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, todėl atstumas tarp bet kurių dviejų stačiakampio taškų neviršija 5.



[3] Šį sprendimą atsiuntė Aleksas Domarkas

a) Kadangi atstumas tarp bet kurių dviejų stačiakampio taškų neviršija 5, tai $d \leqslant 5$. Iš trikampio ACD, kurio kraštinės 5, 4 ir 3, matome, kad d įgyja reikšmę 5, todėl d gali įgyti visas reikšmes intervale $(0, 5]$.

b) Analogiškai kaip ir a) dalyje, $v < d \leqslant 5$. Įrodysime, kad v įgyja bet kurią reikšmę intervale $(0, 5)$. Tam pakanka įrodyti, kad v įgyja bet kurią reikšmę intervale $(\sqrt{24}, 5)$. Tegul $v_0 \in (\sqrt{24}, 5)$. Pažymėkime $t = 4 - \sqrt{v_0^2 - 9}$ (taigi $(4-t)^2 = v_0^2 - 9$) ir nagrinėkime trikampį AEF, kur $CE = t$ ir $CF = \frac{t}{2}$. Įrodysime, kad $EF < AE = v_0 < AF$. Kadangi

$$t < 4 - \sqrt{24-9} = 4 - \sqrt{15} < 0{,}2,$$

tai $EF = \sqrt{t^2 + \frac{t^2}{4}} = \frac{t\sqrt{5}}{2} < 1$. Be to,

$$3 < AE = \sqrt{3^2 + (4-t)^2} = \sqrt{9 + v_0^2 - 9} = v_0 < AF = \sqrt{3^2 + \left(4 - \frac{t}{2}\right)^2}.$$

c) Įrodysime, kad $m < \sqrt{13}$. Tarkime priešingai, kad egzistuoja trikampis, kurio mažiausioji kraštinė yra m, kur $m \geqslant \sqrt{13}$. Stačiakampiai $ABMN$ ir $NMCD$ yra lygūs. Bent dvi iš trijų to trikampio viršūnių priklauso vienam iš jų, sakykime, $ABMN$. Atstumas tarp tų viršūnių neviršija $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ (jis lygus $\sqrt{13}$ tik tada, kai tos viršūnės yra A, M arba B, N). Sakykime, kad tai yra viršūnės A, M (kitas atvejis nagrinėjamas analogiškai). Tada $AM = \sqrt{13}$ yra mažiausioji trikampio kraštinė, nes $m \geqslant \sqrt{13}$. Jei trečioji trikampio viršūnė yra T, tai $AM = \sqrt{13} < MT$. Tačiau toks taškas T nepriklauso stačiakampiui $ABCD$, prieštara. Vadinasi, $m < \sqrt{13}$.

Dabar įrodysime, kad m įgyja bet kurią reikšmę intervale $(0, \sqrt{13})$. Pakanka įrodyti, kad m įgyja bet kurią reikšmę intervale $(\sqrt{12}, \sqrt{13})$. Pažymėkime $s = 2 - \sqrt{m_0^2 - 9}$, kur $m_0 \in (\sqrt{12}, \sqrt{13})$, ir nagrinėkime trikampį ALD, kur $LM = s$ (žr. brėžinį). Įrodysime, kad $AL = m_0 < LD < AD$. Aišku, kad

$$AL = \sqrt{3^2 + (2-s)^2} = \sqrt{9 + m_0^2 - 9} = m_0 < \sqrt{13}.$$

Kadangi $0 < s < 2 - \sqrt{12 - 9} = 2 - \sqrt{3} < 0{,}3$, tai

$$\sqrt{13} < LD = \sqrt{3^2 + (2+s)^2} < \sqrt{9 + 2{,}3^2} = \sqrt{14{,}29} < 4 = AD.$$

Atsakymas: a) $0 < d \leqslant 5$; b) $0 < v < 5$; c) $0 < m < \sqrt{13}$.

7 (11-12 klasės). Šachmatų turnyre dalyvavo 20 žaidėjų. Kiekvienas iš jų su kiekvienu kitu sužaidė po vieną partiją. (Už pergalę buvo skiriamas 1 taškas,

už lygiąsias 0,5 taško, už pralaimėjimą 0 taškų.) Turnyro partiją vadinsime *neteisinga*, jei ją laimėjęs žaidėjas turnyre surinko mažiau taškų už savo varžovą. Ar galėjo tokiame turnyre būti sužaista:

a) bent 70 neteisingų partijų?

b) bent 140 neteisingų partijų?

Sprendimas. a) Nurodysime turnyrą, kuriame buvo sužaistos 72 neteisingos partijos. Suskirstykime visus šachmatininkus į tris grupes A, B (abi po 6 žaidėjus) ir C (8 žaidėjai). Tarkime, kad visi B grupės žaidėjai laimėjo prieš visus A grupės žaidėjus, o visi C grupės žaidėjai laimėjo prieš visus B grupės žaidėjus, bet pralaimėjo visiems A grupės žaidėjams. Be to, visi A grupės žaidėjai sužaidė tarpusavyje lygiosiomis, visi B grupės žaidėjai taip pat sužaidė tarpusavyje lygiosiomis, o C grupės žaidėjai sužaidė tarpusavyje taip, kad vienas iš jų visas 7 partijas laimėjo ir surinko 7 taškus (vadinkime jį $C7$), kitas – 6 taškus ($C6$) ir t. t. iki $C0$, kuris visas savo partijas priešininkams iš C grupės pralaimėjo.

Tada kiekvienas A grupės šachmatininkas surinko $8 + 2{,}5 = 10{,}5$ taško, o kiekvienas B grupės šachmatininkas surinko $6 + 2{,}5 = 8{,}5$ taško. Vadinasi, tokio turnyro lentelėje taškai pasiskirstys taip: $C0 - 6$; $C1 - 7$; $C2 - 8$; visi B grupės šachmatininkai – po 8,5; $C3 - 9$; $C4 - 10$; visi A grupės šachmatininkai – po 10,5; $C5 - 11$; $C6 - 12$; $C7 - 13$. Neteisingos turnyro partijos yra tarp A ir B ($6 \cdot 6 = 36$ partijos), tarp $C0, C1, C2$ ir B ($3 \cdot 6 = 18$ partijų), bei tarp $C5, C6, C7$ ir A ($3 \cdot 6 = 18$ partijų). Iš viso buvo sužaistos $36 + 18 + 18 = 72$ neteisingos partijos.

b) Įrodysime, kad taip būti negalėjo. Suskirstykime žaidėjus į dvi grupes A ir B pagal surinktus taškus, t. y. A yra grupė, sudaryta iš 10 šachmatininkų, surinkusių daugiausiai taškų, o B – grupė iš likusių 10 šachmatininkų. (Jei A galima parinkti keliais būdais, tai imame bet kuriuos 10 tokių žaidėjų, o B likusius 10.) Partiją vadinsime *teisinga*, jei ji nėra neteisinga. Kadangi iš viso turnyre buvo sužaista $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ partijų, tai pakanka įrodyti, kad buvo daugiau kaip 50 teisingų partijų. Tarkime, kad A grupės žaidėjai su B grupės žaidėjais sužaidė t teisingų partijų. Įrodysime, kad $t > 50$. (Akivaizdu, jog tada visame turnyre tikrai buvo sužaista daugiau kaip 50 teisingų partijų.)

Aišku, kad A grupės šachmatininkai žaisdami vienas su kitu surinko $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ taškus. Taigi iš viso jie (visi kartu) surinko ne daugiau kaip $45 + t$ taškų. Analogiškai, B grupės žaidėjai žaisdami vienas su kitu surinko 45 taškus. Be to, jie sužaidė $10 \cdot 10 = 100$ partijų su A grupės žaidėjais. Vadinasi, B grupės žaidėjai visi kartu surinko ne mažiau kaip $45 + 100 - t$ taškų, nes kiekvieną iš $100 - t$ neteisingų partijų, sužaistų tarp A ir B, jie laimėjo. Akivaizdu, kad $45 + t \geqslant 45 + 100 - t$. Be to, jei čia turime lygybę, tai, remiantis grupių A ir B apibrėžimu, visi 20 šachmatininkų surinko po lygiai taškų, o tada visos 190 partijų yra teisingos. Vadinasi, nelygybė yra griežta, t. y. $45+t > 45+100-t$, todėl $t > 50$.

Atsakymas: a) galėjo; b) negalėjo.

8 (11-12 klasės).

a) Intervale $(25, 36)$ raskite tokius tris skirtingus sveikuosius skaičius a, b ir c, kad $a^2 + b^2$ dalytųsi iš c.

b) Ar visada intervale $(n^2, (n+1)^2)$, kur n didesnis už 1 natūralusis skaičius, egzistuoja tokie trys skirtingi sveikieji skaičiai a, b ir c, kad a^2+b^2 dalijasi iš c?

Sprendimas. a) Toks trejetas yra, pavyzdžiui, $a = 31$, $b = 27$, $c = 26$, kadangi

$$(a^2 + b^2) \pmod{c} = (31^2 + 27^2) \pmod{26} = (5^2 + 1^2) \pmod{26} = 0.$$

b) Pažymėkime $a = c + x$ ir $b = c + y$, kur $x, y \neq 0$ ir $x \neq y$. Tada

$$(a^2 + b^2) \pmod{c} = ((c + x)^2 + (c + y)^2) \pmod{c} = (x^2 + y^2) \pmod{c}.$$

Jei $c = x^2 + y^2$, tai dešinioji pusė yra lygi 0, todėl $a^2 + b^2$ dalijasi iš c. Imkime $x = n$ ir $y = 1$. Tada $c = n^2 + 1$, $b = c + 1 = n^2 + 2$ ir $a = c + n = n^2 + n + 1$ yra reikiamas trejetas, tenkinantis uždavinio sąlygą: $n^2 < c < b < a < n^2 + 2n + 1$.

Atsakymas: a) pvz., $a = 31$, $b = 27$, $c = 26$; b) visada.