

62-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Raseiniai, 2013 03 26
9–10 klasės

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 2z^4 = 18, \\ x + 2y + 2z^2 = 40, \\ z^4 - 2xy = 9. \end{cases}$$

2. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra pažymėti taškai atitinkamai M ir N .
- a) Raskite AL , jei L yra atkarpos MN vidurio taškas, $BN = 7$ ir $AM = NC$.
- b) Įrodykite, kad tiesės MN ir AC yra statmenos, jei $BN = 7$ ir $AM = NC = 2\sqrt{7}$.
3. Lentoje surašyti visi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 64. Pradedantysis žaidėjas A pasirenka vieną iš jų ir įrašo į bet kurią lentelės 8×8 langelį. Tada žaidėjas B vieną iš likusių skaičių įrašo į bet kurią laisvą lentelės langelį. Taip pakaitomis jie užpildo visą lentelę. Dabar kiekviename stulpelyje išrenkamas mažiausias skaičius, ir apskaičiuojama visų tų 8 skaičių suma S .
- a) Nurodykite, kaip turi žaisti žaidėjas B , kad skaičius S būtų lyginis, nors ir kaip žaistų jo priešininkas.
- b) Nurodykite, kaip turi žaisti žaidėjas B , kad skaičius S būtų nelyginis, nors ir kaip žaistų jo priešininkas.
4. Pažymėkime skaičių, kurio dešimtainiame užrašė yra n devynetų, simboliu $d_n = 9 \cdots 99$.
- a) Raskite bent vieną skaičiaus $d_3 = 999$ kartotinį, kuriame nėra skaitmens 9.
- b) Raskite mažiausią tokį skaičiaus $d_3 = 999$ kartotinį.
- c) Raskite mažiausią tokį skaičiaus $d_n = 9 \cdots 99$ kartotinį, kuriame nėra skaitmens 9.

11–12 klasės

1. Realieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą

$$ac + bc + c^2 < a + b + c.$$

Įrodykite, kad

$$4bc + 4c < a^2 + 4b + 4.$$

2. Iš stačiakampio popieriaus lapo 4×3 iškerpamas trikampis, kurio kraštinių ilgių $d > v > m$.
- Kokias reikšmes gali įgyti d ?
 - Kokias reikšmes gali įgyti v ?
 - Kokias reikšmes gali įgyti m ?
3. Šachmatų turnyre dalyvavo 20 žaidėjų. Kiekvienas iš jų su kiekvienu kitu sužaidė po vieną partiją. (Už pergalę buvo skiriamas 1 taškas, už lygiąsias 0,5 taško, už pralaimėjimą 0 taškų.) Turnyro partiją vadinsime *neteisinga*, jei ją laimėjęs žaidėjas turnyre surinko mažiau taškų už savo varžovą. Ar galėjo tokiame turnyre būti sužaista:
- bent 70 neteisingų partijų?
 - bent 140 neteisingų partijų?
4. a) Intervale $(25, 36)$ raskite tokius tris skirtingus sveikuosius skaičius a, b ir c , kad $a^2 + b^2$ dalytųsi iš c .
- b) Ar visada intervale $(n^2, (n + 1)^2)$, kur n didesnis už 1 natūralusis skaičius, egzistuoja tokie trys skirtingi sveikieji skaičiai a, b ir c , kad $a^2 + b^2$ dalijasi iš c ?