2014 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

63-ioji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Vilnius, 2014 04 14

1 (9-10 klasės). Raskite visus natūraliuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+y-z=12, \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{cases}$$

sprendinius.

Sprendimas. Kadangi

$$x^2+y^2-z^2 = x^2+y^2-(x+y-12)^2 = -2xy+24x+24y-144 =$$
$$= -2(xy-12x-12y+72) = -2((x-12)(y-12)-72) = 12,$$

tai duotoji lygčių sistema yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ x+y>12, \\ (x-12)(y-12)=66, \\ z=x+y-12, \end{cases}$$

kur $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Išskaidę $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, matome, kad visi įmanomi reikšmių porų, kurias gali įgyti sveikųjų skaičių pora $(x-12, y-12)$, variantai yra tokie:

$$(1,66),(66,1),(2,33),(33,2),(3,22),(22,3),(6,11),(11,6),(-1,-66),$$

$$(-66,-1),(-2,-33),(-33,-2),(-3,-22),(-22,-3),(-6,-11),(-11,-6).$$

Pridėję po 12, gauname sveikųjų skaičių poras $(x,y) = (13,78),(78,13),(14,45),$ $(45,14),(15,34),(34,15),(18,23),(23,18),(6,1),(1,6)$ (kitose porose netenkinama bent viena iš sąlygų $x>0$, $y>0$). Be to, dvi paskutinės poros $(6,1)$

[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/

ir $(1,6)$ netenkina sąlygos $x+y>12$, o pirmos aštuonios poros ją tenkina. Kadangi tos aštuonios sveikųjų skaičių poros (x,y) tenkina nelygybes $x>0$, $y>0$, $x+y>12$ ir lygtį $(x-12)(y-12)=66$, tai, naudodamiesi lygtimi $z=x+y-12$, randame aštuonis sveikuosius antrosios sistemos (o tuo pačiu ir aštuonis natūraliuosius duotosios lygčių sistemos) sprendinius (x,y,z):

$$(13,78,79),(78,13,79),(14,45,47),(45,14,47),$$

$$(15,34,37),(34,15,37),(18,23,29),(23,18,29).$$

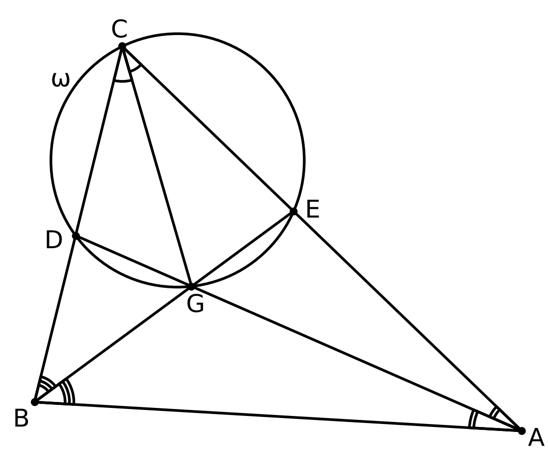
Atsakymas: $(x,y,z)=(13,78,79),(78,13,79),(14,45,47),(45,14,47),$ $(15,34,37),(34,15,37),(18,23,29),(23,18,29)$.

2 (9-10 klasės). Trikampio ABC pusiaukampinės AD ir BE kertasi taške G, o kampas C lygus $60°$. Įrodykite, kad $GD=GE$.

Sprendimas. Pirmas būdas. Tegu α ir β yra kampų A ir B dydžiai. Iš lygybės $\alpha+\beta=180°-60°=120°$ išplaukia, kad

$$\angle DGE=\angle AGB=180°-\angle BAD-\angle EBA=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=120°.$$

Todėl $\angle DGE+\angle DCE=180°$. Vadinasi, taškai C,E,G ir D priklauso vienam apskritimui ω (žr. brėžinį). Kadangi trikampio pusiaukampinės kertasi viename



taške (mūsų atveju taške G), tai CG yra kampo C pusiaukampinė. Taigi $\angle DCG = \angle GCE = 30°$. Vadinasi, apskritimo ω lankai DG ir GE yra lygūs, todėl lygios ir juos atitinkančios stygos GD ir GE.

Antras būdas. Kaip ir pirmuoju būdu, įrodome, kad $\angle DGE + \angle DCE = 180°$ ir $\angle DCG = \angle GCE = 30°$. Pažymėkime $\gamma = \angle GDC$. Tada $\angle GEC = 360° - 180° - \angle GDC = 180° - \gamma$. Pritaikę sinusų teoremą trikampiui GDC, gauname $\frac{GD}{\sin 30°} = \frac{GC}{\sin \angle GDC} = \frac{GC}{\sin \gamma}$. Analogiškai, pritaikę sinusų teoremą trikampiui GCE, gausime

$$\frac{GE}{\sin 30°} = \frac{GC}{\sin \angle GEC} = \frac{GC}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{GC}{\sin \gamma}.$$

Vadinasi, $GD = GE$.

3 (9-10 klasės). Skaičiai $1, 2, 3, \ldots, n$ bet kaip surašomi vienas po kito. Imami visi gretimų dviejų skaičių skirtumai (iš didesnio skaičiaus atimamas mažesnis) ir iš visų tų skirtumų (kurių yra $n - 1$) išrenkamas mažiausias skirtumas d.

a) Kokia didžiausia d reikšmė, jei $n = 99$?
b) Kokia didžiausia d reikšmė, jei $n = 2014$?

Sprendimas. Įrodysime, kad didžiausia d reikšmė yra lygi k, jei $n = 2k$ arba $n = 2k+1$, čia $k \in \mathbb{N}$. Kadangi a) dalyje $n = 2 \cdot 49 + 1$, tai $d = 49$. Atitinkamai, b) dalyje $n = 2 \cdot 1007$, todėl $d = 1007$.

Tegu $n = 2k + 1$. Šalia skaičiaus $k + 1$ (kairėje arba dešinėje pusėje) yra skaičius $m \in \{1, 2, \ldots, 2k + 1\}$. Skirtumas tarp $k + 1$ ir m neviršija k, todėl tarp $n - 1 = 2k$ skirtumų atsiras toks skirtumas, kuris neviršija k. Vadinasi, kad ir kaip bebūtų surašyti skaičiai, visada galioja nelygybė $d \leqslant k$. Kita vertus, surašykime skaičius taip:

$$k + 1, 1, k + 2, 2, k + 3, \ldots, k - 1, 2k, k, 2k + 1.$$

Tada gaunami skirtumai yra tokie:

$$k, k + 1, k, k + 1, \ldots, k + 1, k, k + 1.$$

Matome, kad visi jie yra ne mažesni už k, todėl, šiuo atveju, $d = k$. Taigi, kai $n = 2k + 1$, didžiausia įmanoma d reikšmė yra lygi k.

Analogiškai, jei $n = 2k$, tai šalia skaičiaus $k+1$ (kairėje arba dešinėje pusėje) yra skaičius $t \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Skirtumas tarp $k+1$ ir t neviršija k, todėl $d \leqslant k$. Surašę skaičius

$$k+1, 1, k+2, 2, k+3, \ldots, k-1, 2k, k,$$

gausime skirtumus $k, k+1, k, k+1, \ldots, k+1, k$. Jie visi yra ne mažesni už k. Vadinasi, kai $n = 2k$, didžiausia d reikšmė yra lygi k.

Atsakymas: a) 49; b) 1007.

4 (9-10 klasės). Raskite visas sveikųjų skaičių poras (m, n), su kuriomis teisinga lygybė

$$(n+101)(n+102)(n+103)(n+104) = (m+1)(m+2).$$

Sprendimas. Įrodysime, kad $m = -1$ arba $m = -2$. Tada dešinioji lygybės pusė yra lygi nuliui. Vadinasi, kairioji lygybės pusė taip pat lygi nuliui, todėl gaunamos aštuonios poros $(m, n) = (-1, -101), (-1, -102), (-1, -103), (-1, -104), (-2, -101), (-2, -102), (-2, -103), (-2, -104)$, tenkinančios duotąją lygybę.

Pažymėkime $a = m + 1$ ir $b = (n + 101)(n + 104) + 1$. Pakanka įrodyti, kad $a = -1$ arba $a = 0$, jei a ir b – sveikieji skaičiai. (Tada $m = -1$ arba $m = -2$ ir gausime aštuonis aukščiau nurodytus sprendinius.) Tarkime priešingai, kad $a \geqslant 1$ arba $a \leqslant -2$. Pastebime, kad

$$\begin{aligned}(n+102)(n+103) = n^2 + 205n + 10506 = n^2 + 205n + 10504 + 2 = \\ = (n+101)(n+104) + 2 = b - 1 + 2 = b + 1.\end{aligned}$$

Vadinasi, duotą lygybę galima perrašyti taip: $(b-1)(b+1) = a(a+1)$. Ji ekvivalenti lygybei $b^2 = a^2 + a + 1$, kuri galioja tik kai $a^2 + a + 1$ yra tikslus kvadratas. Tačiau jei $a \geqslant 1$, tai $a^2 < a^2 + a + 1 < (a+1)^2$, todėl $a^2 + a + 1$ nėra tikslus kvadratas. Analogiškai, jei $a \leqslant -2$, tai $(|a| - 1)^2 < a^2 + a + 1 < |a|^2$, todėl ir šiuo atveju $a^2 + a + 1$ nėra tikslus kvadratas.

Atsakymas: $(m, n) = (-1, -101), (-1, -102), (-1, -103), (-1, -104), (-2, -101), (-2, -102), (-2, -103), (-2, -104)$.

5 (11-12 klasės). Dalia nubrėžė lentoje trikampį. Loreta išmatavo jo kraštines a, b, c, įsitikino, kad visos jos yra natūralieji skaičiai, ir apskaičiavo sumą

$$S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c}.$$

a) Ar gali skaičius S būti lygus 4?
b) Ar gali skaičius S būti lygus 2,99?
c) Ar gali skaičius S būti lygus 3,05?

Sprendimas. Jei $a = 3, b = 4, c = 5$, tai

$$S = \frac{3}{4+5-3} + \frac{4}{3+5-4} + \frac{5}{3+4-5} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{5}{2} = 4.$$

Jei $a = 8$, $b = c = 9$, tai

$$S = \frac{8}{9+9-8} + \frac{9}{8+9-9} + \frac{9}{8+9-9} = \frac{8}{10} + \frac{9}{4} = 0{,}8 + 2{,}25 = 3{,}05.$$

Vadinasi, a) ir c) atvejais nurodytą S reikšmę gauti galima.

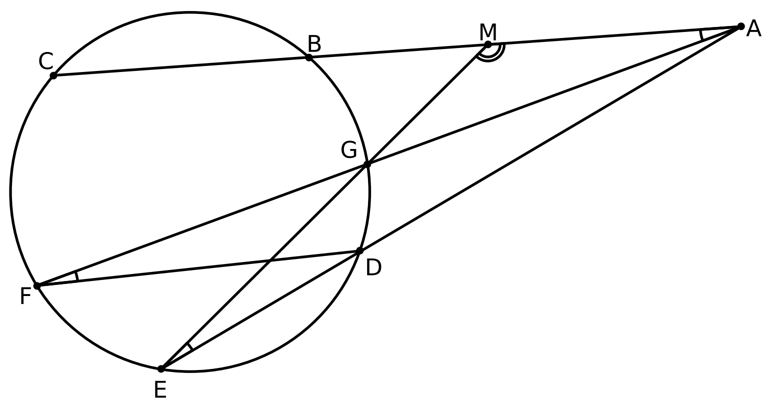
Įrodysime, kad b) atveju nurodytos reikšmės 2,99 gauti neįmanoma, kadangi skaičius S negali būti mažesnis už 3, kai a, b, c yra bet kokio trikampio kraštinės (ir a, b, c nebūtinai natūralieji skaičiai). Pažymėkime $x = b+c-a$, $y = a+c-b$ ir $z = a+b-c$. Tada $x+y = 2c$, $x+z = 2b$ ir $y+z = 2a$. Be to, pagal trikampio nelygybę, $x, y, z > 0$. Įrašę šias išraiškas į S ir tris kartus pritaikę nelygybę $\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \geqslant 1$ (su $t = x/y, x/z$ ir y/z), gauname, kad

$$S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\Big) \geqslant 1 + 1 + 1 = 3.$$

Atsakymas: a) gali; b) negali; c) gali.

6 (11-12 klasės). Per apskritimo išorėje esantį tašką A nubrėžtos dvi kirstinės. Viena kirstinė kerta apskritimą tokiuose taškuose B ir C, kad $AB = 6$, $AC = 10$, kita kirstinė – taškuose D ir E (D yra tarp taškų A ir E). Per tašką D nubrėžta tiesė, lygiagreti tiesei AC, kerta apskritimą taške F (čia $F \neq D$). Tiesė FA apskritimą kerta taške G (čia $G \neq F$), o tiesės EG ir AC kertasi taške M. Raskite atkarpos AM ilgį.

Sprendimas. Aišku, kad $\angle MAG = \angle CAF = \angle GFD = \angle GED = \angle MEA$ ir $\angle GMA = \angle EMA$, todėl trikampiai AMG ir EMA yra panašūs. Vadinasi, $MG : AM = AM : ME$. Taigi $AM^2 = MG \cdot ME$. Pagal kirstinių savybę



$MG \cdot ME = MB \cdot MC$. Vadinasi,

$$AM^2 = MB \cdot MC = (AB - AM)(AC - AM) = AB \cdot AC - AM \cdot (AB + AC) + AM^2.$$

Iš čia gauname, kad

$$AM = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{6 \cdot 10}{6 + 10} = \frac{15}{4} = 3{,}75.$$

Atsakymas: 3,75.

7 (11-12 klasės). Futbolo turnyre dalyvavo 18 komandų. Kiekviena iš jų su kiekviena kita sužaidė po dvejas rungtynes, vienas savo aikštėje, o kitas – svečiuose. Už pergalę buvo skiriami 3 taškai, už lygiąsias 1 taškas, už pralaimėjimą 0 taškų. Pasibaigus turnyrui visos komandos surinko po lygiai taškų. Įrodykite, kad bent dvi komandos, žaisdamos svetimose aikštėse, pasiekė po vienodą skaičių pergalių (galbūt nė vienos).

Sprendimas. Turnyre, kuriame dalyvavo n komandų (čia $n \geqslant 2$, o mūsų atveju $n = 18$), iš viso buvo sužaista $n(n-1)$ rungtynių, todėl komandos surinko ne daugiau kaip $3n(n-1)$ taškų. Tarkime, kad jos surinko po m taškų. Aišku, kad $m \leqslant \frac{3n(n-1)}{n} = 3(n-1)$. Be to, jeigu turnyre bent vienerios rungtynės buvo sužaistos lygiosiomis, tai bendras komandų surinktas taškų skaičius yra mažesnis už $3n(n-1)$, todėl ši nelygybė yra griežta, t. y. $m < 3(n-1)$.

Tarkime, kad nėra tokių dviejų komandų, kurios, žaisdamos svetimose aikštėse, pasiekė po vienodą skaičių pergalių. Tada visos komandos, žaisdamos išvykose, surinko po skirtingą pergalių skaičių, t. y. $0, 1, \ldots, n-1$, nes komandų yra n. Nagrinėkime dvi komandas: A, kuri nepasiekė pergalių svečiuose, ir B, kuri iškovojo $n-1$ pergalę svečiuose. Tada B turnyre surinko ne mažiau kaip $3(n-1)$ taškų. Tai įmanoma tik tada, kai $m = 3(n-1)$ ir jokios rungtynės turnyre nesibaigė lygiosiomis. Kadangi komanda A svečiuose nepasiekė nė vienos pergalės, tai ji visas rungtynes svečiuose pralaimėjo. Vadinasi, surinkti $3(n-1)$ taškų ji galėjo tik laimėdama visas rungtynes savo aikštėje. Taigi A prieš B savo aikštėje laimėjo, kas prieštarauja tam, jog B svečiuose laimėjo visas rungtynes.

8 (11-12 klasės). Natūralieji skaičiai a, b, c, d tenkina lygtį

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^{2014}.$$

a) Raskite bent vieną šios lygties sprendinį (a, b, c, d).

b) Raskite visus šios lygties sprendinius (a, b, c, d), tenkinančius sąlygą $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.

Sprendimas. a) Kadangi $1^2+1^2+1^2+2^2 = 7$, tai toks sprendinys yra, pavyzdžiui, $a = b = c = 2^{2014}$, $d = 2^{2015}$.

b) Įrodysime, kad visi skaičiai a, b, c ir d dalijasi iš 2^{2013}. Tarkime, kad natūralieji skaičiai A, B, C, D tenkina lygybę

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 7 \cdot 4^j,$$

kur $j \geqslant 2$ – natūralusis skaičius. Sveikojo skaičiaus kvadratas moduliu 4 yra arba 0 (jei tas skaičius yra lyginis), arba 1 (jei tas skaičius – nelyginis). Taigi visi keturi skaičiai A, B, C, D, tenkinantys šią lygybę, yra lyginiai arba visi keturi yra nelyginiai. Tačiau jie visi nelyginiai būti negali, nes tada moduliu 8 jų kvadratų suma $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ yra lygi 4:

$$(2k_1 - 1)^2 + (2k_2 - 1)^2 + (2k_3 - 1)^2 + (2k_4 - 1)^2 = 8k + 4$$

su sveikuoju $k = \frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} + \frac{k_3(k_3-1)}{2} + \frac{k_4(k_4-1)}{2} \geqslant 0$ (čia $A = 2k_1 - 1$, $B = 2k_2 - 1$, $C = 2k_3 - 1$, $D = 2k_4 - 1$, o $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N}$). Gauname prieštarą, kadangi kairioji lygybės pusė, $A^2+B^2+C^2+D^2$, nesidalija iš 8, o dešinioji, $7 \cdot 4^j$, dalijasi iš 8, nes $j \geqslant 2$. Vadinasi, visi skaičiai A, B, C, D yra lyginiai. Pritaikę šį samprotavimą kiekvienai tokiai lygčiai, kur $j = 2014$, $j = 2013$, $\ldots$, $j = 2$ (iš viso 2013 kartų), gausime, kad a, b, c, d yra lyginiai, po to, kad $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2}$ – lyginiai ir t.t., ir pagaliau, kad

$$\frac{a}{2^{2012}}, \frac{b}{2^{2012}}, \frac{c}{2^{2012}}, \frac{d}{2^{2012}}$$

– lyginiai. Vadinasi, visi skaičiai a, b, c, d dalijasi iš 2^{2013}.

Pažymėkime $a = 2^{2013}x$, $b = 2^{2013}y$, $c = 2^{2013}z$, $d = 2^{2013}u$. Čia $x, y, z, u \in \mathbb{N}$ tenkina sąlygą $x \leqslant y \leqslant z \leqslant u$. Įrašę į pradinę lygtį ir suprastinę, gausime

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 28.$$

Kadangi $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant u$ ir $u \in \mathbb{N}$, tai $u \in \{3, 4, 5\}$. Jei $u \geqslant 6$, tai $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 > 6^2 > 28$, o jei $u \leqslant 2$, tai $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 < 28$.

Dabar išnagrinėsime atvejus $u = 5$, $u = 4$ ir $u = 3$. Kai $u = 5$, tai $x^2 + y^2 + z^2 = 28 - 25 = 3$, todėl $x = y = z = 1$. Gauname sprendinį $(a, b, c, d) = (2^{2013}, 2^{2013}, 2^{2013}, 5 \cdot 2^{2013})$. Kai $u = 4$, tai $x^2 + y^2 + z^2 = 28 - 16 = 12$. Nesunku įsitikinti, kad vienintelis natūralusis šios lygties sprendinys yra $x = y = z = 2$. Taip gauname antrą duotos lygties sprendinį $(a, b, c, d) = (2^{2014}, 2^{2014}, 2^{2014}, 2^{2015})$. Galiausiai, kai $u = 3$, tai $x^2 + y^2 + z^2 = 28 - 9 = 19$. Nesunku įsitikinti, jog vienintelis natūralusis šios lygties sprendinys, tenkinantis sąlygą $x \leqslant y \leqslant z \leqslant 3$, yra $x = 1$, $y = z = 3$. Taip gauname dar vieną duotos lygties sprendinį $(a, b, c, d) = (2^{2013}, 3 \cdot 2^{2013}, 3 \cdot 2^{2013}, 3 \cdot 2^{2013})$.

Atsakymas: a) pavyzdžiui, $(a, b, c, d) = (2^{2014}, 2^{2014}, 2^{2014}, 2^{2015})$; b) $(a, b, c, d) = (2^{2013}, 2^{2013}, 2^{2013}, 5 \cdot 2^{2013}), (2^{2013}, 3 \cdot 2^{2013}, 3 \cdot 2^{2013}, 3 \cdot 2^{2013})$ ir $(2^{2014}, 2^{2014}, 2^{2014}, 2^{2015})$.