2015 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

64-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Vilnius, 2015 04 01

1 (9-10 klasės). Turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 1, \\ -x^3 + 8y^3 + 27z^3 = -1. \end{cases}$$

a) Nurodykite bent vieną jos realųjį sprendinį (x, y, z).
b) Nurodykite bent du jos realiuosius sprendinius.
c) Raskite visus jos realiuosius sprendinius.

Sprendimas. Pažymėkime $X = x$, $Y = 2y$ ir $Z = 3z$. Pakėlę pirmąją lygčių sistemos

$$\begin{cases} X + Y - Z = -1, \\ X^2 - Y^2 + Z^2 = 1, \\ -X^3 + Y^3 + Z^3 = -1 \end{cases}$$

lygtį kvadratu ir atėmę iš jos antrąją lygtį, gausime

$$\begin{aligned} 0 = (-1)^2 - 1^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY - 2XZ - 2YZ - X^2 + Y^2 - Z^2 = \\ &= 2Y^2 + 2XY - 2Z(X+Y) = 2Y(X+Y) - 2Z(X+Y) = \\ &= 2(Y-Z)(X+Y). \end{aligned}$$

Taigi $Y = Z$ arba $X = -Y$.

Išnagrinėkime atvejį $Y = Z$. Tada iš pirmosios lygties gauname $X = -1$, o iš trečiosios $2Y^3 = -1 + X^3 = -2$. Vadinasi, $Y = Z = -1$. Trejetas $(X, Y, Z) = (-1, -1, -1)$ tenkina lygčių sistemą, taigi vienas duotosios lygčių sistemos sprendinys yra $(x, y, z) = (X, \frac{Y}{2}, \frac{Z}{3}) = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/

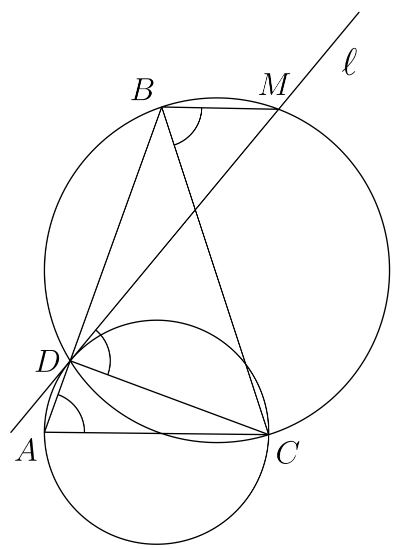
Antruoju atveju, $X = -Y$, iš pirmosios lygties gauname $Z = 1$, o iš trečiosios $2Y^3 = -1 - Z^3 = -2$. Vadinasi, $Y = -1$ ir $X = 1$. Trejetas $(X, Y, Z) = (1, -1, 1)$ tenkina lygčių sistemą, taigi antrasis duotosios lygčių sistemos sprendinys yra $(x, y, z) = (X, \frac{Y}{2}, \frac{Z}{3}) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Atsakymas: $(x, y, z) = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

2 (9-10 klasės). Trikampio ABC, kuriame $AB = BC$ ir $\angle ABC = 40^\circ$, kraštinėje AB pažymėtas taškas D. Tiesė ℓ taške D liečia apie trikampį ADC apibrėžtą apskritimą ir kerta apie trikampį BDC apibrėžtą apskritimą taškuose D ir M. Raskite kampą MBA.

Sprendimas. Kadangi trikampis ABC yra lygiašonis ir $\angle ABC = 40^\circ$, tai

$$\angle DAC = \angle BAC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$



Kadangi tiesė ℓ liečia apibrėžtą apie ADC apskritimą taške D, tai

$$\angle MDC = \angle DAC = 70^\circ.$$

Taigi $\angle MBC = \angle MDC = 70^\circ$, nes įbrėžtiniai kampai MBC ir MDC remiasi į tą patį apskritimo, apibrėžto apie BDC, lanką. Vadinasi,

$$\angle MBA = \angle MBC + \angle ABC = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ.$$

Atsakymas: 110°.

3 (9-10 klasės). Į lentelės 3×3 langelius įrašyti skaičiai nuo 1 iki 9 (kaip parodyta paveikslėlyje). Lentelėje leidžiama atlikti tokią operaciją: pasirenkamas 2×2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

kvadratas ir jo vienos kurios nors įstrižainės abu skaičiai vienetu padidinami, o kitos įstrižainės abu skaičiai vienetu sumažinami. Kelis kartus atlikus tokią operaciją, kai kurie skaičiai lentelėje tapo lygūs. Ar tokiu būdu galima gauti

a) 9 lygius skaičius?
b) 8 lygius skaičius?
c) 7 lygius skaičius?
d) 6 lygius skaičius?

Sprendimas. Pastebėkime, kad tokia operacija nekeičia 3×3 lentelės eilučių ir stulpelių sumų. Taigi pradžioje ir pabaigoje jos bus lygios $6, 15, 24$ ir $12, 15, 18$. Jei po keleto operacijų 9 arba bent jau 8 skaičiai lentelėje būtų lygūs, tai būtinai atsirastų bent dvi eilutės ir bent du stulpeliai, sudaryti iš vienodų skaičių. Taigi bent keturios eilučių ir stulpelių sumos būtų lygios, o tarp mūsų skaičių tokie yra tik du (15 ir 15). Taigi atvejai a) ir b) negalimi.

Tarkime, kad po keleto operacijų gavome 7 lygius skaičius. Jei jie visi lygūs a, o kiti du skaičiai yra b ir c, tai tie skaičiai b ir c turi būti skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose, nes kitaip bent trys iš šešių eilučių ir stulpelių sumų būtų lygios (o jų yra tik dvi 15 ir 15). Tada trijų eilučių sumos yra $3a$, $2a+b$ ir $2a+c$ (nebūtinai tokia tvarka), o stulpelių sumos taip pat $3a$, $2a+b$ ir $2a+c$. Tai neįmanoma, kadangi eilučių sumos yra $6, 15, 24$, o stulpelių – $12, 15, 18$. Vadinasi, 7 lygių skaičių gauti neįmanoma.

Dabar parodysime kaip galima gauti 6 lygius skaičius. Su įvairiais kvadratais 2×2 atlikinėsime tokią operaciją A, kai 2×2 kvadrate įrašyti skaičiai x, y, z, u

x	y
z	u

bus keičiami taip: x ir u į atitinkamai $x-1$ ir $u-1$, o y ir z į atitinkamai $y+1$ ir $z+1$. Atliksime šią operaciją A dvylika kartų taip:

- penkis kartus su kairėje viršuje esančiu kvadratu 2×2. Tada iš pradinės lentelės

1	2	3
4	5	6
7	8	9

gausime lentelę

−4	7	3
9	0	6
7	8	9

- du kartus su dešinėje viršuje esančiu kvadratu 2×2, ir gausime

−4	5	5
9	2	4
7	8	9

- keturis kartus su kairėje apačioje esančiu kvadratu 2×2. Gausime lentelę

−4	5	5
5	6	4
11	4	9

- vieną kartą su dešinėje apačioje esančiu kvadratu 2×2. Gausime lentelę

−4	5	5
5	5	5
11	5	8

Matome, kad po visų 12 operacijų šioje lentelėje 6 skaičiai tapo lygūs, taigi 6 lygius skaičius gauti galima.

Atsakymas: a) ne; b) ne; c) ne; d) taip.

4 (9-10 klasės). Natūraliųjų skaičių trejetas $a \leqslant b \leqslant c$ tenkina lygybę

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2.$$

a) Nurodykite bent du tokius trejetus.

b) Raskite visus tokius trejetus.

Sprendimas. Jei $a = 1$, tai lygybė $2\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2$ neįmanoma, nes $1+\frac{1}{b} > 1$ ir $1+\frac{1}{c} > 1$, taigi kairioji pusė yra didesnė už 2.

Jei $a \geqslant 4$, tai iš $c \geqslant b \geqslant a \geqslant 4$ išplaukia, kad kairioji pusė yra mažesnė, nes

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64} < 2.$$

Vadinasi, $a = 2$ arba $a = 3$.

Kai $a=2$, tai $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{4}{3}$. Taigi $4bc=3(b+1)(c+1)$ ir $bc=3b+3c+3$. Vadinasi, $(b-3)(c-3)=12$. Abu daugikliai $b-3$ ir $c-3$ negali būti neigiami, nes $c\geqslant b\geqslant a\geqslant 2$, todėl $c-3\geqslant b-3\geqslant -1$ (ir $(-1)\cdot(-1)\neq 12$). Akivaizdu, kad $b-3\neq 0$ ir $c-3\neq 0$. Taigi $c-3\geqslant b-3\geqslant 1$. Iš skaičiaus 12 trijų skaidinių dauginamaisiais $1\cdot 12$, $2\cdot 6$ ir $3\cdot 4$ gauname tris poras $(b-3,c-3)=(1,12),(2,6),(3,4)$. Taip gauname tris trejetus $a\leqslant b\leqslant c$, tenkinančius duotąją lygtį $(a,b,c)=(2,4,15),(2,5,9)$ ir $(2,6,7)$.

Antruoju atveju, kai $a=3$, lygtis bus tokia: $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$. Todėl $3bc=2(b+1)(c+1)$ ir $bc=2b+2c+2$. Vadinasi, $(b-2)(c-2)=6$. Abu daugikliai $b-2$ ir $c-2$ yra teigiami, nes $c\geqslant b\geqslant a\geqslant 3$. Iš skaičiaus 6 dviejų skaidinių dauginamaisiais $1\cdot 6$ ir $2\cdot 3$ gauname dvi poras $(b-2,c-2)=(1,6),(2,3)$. Taip gauname dar du trejetus $a\leqslant b\leqslant c$, tenkinančius duotąją lygtį $(a,b,c)=(3,3,8)$ ir $(3,4,5)$.

Atsakymas: $(a,b,c)=(2,4,15),(2,5,9),(2,6,7),(3,3,8)$ ir $(3,4,5)$.

5 (11-12 klasės). Turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3-x^2=2y,\\ 8y^3-4y^2=x. \end{cases}$$

a) Nurodykite bent du jos realiuosius sprendinius (x,y).
b) Raskite visus jos realiuosius sprendinius.

Sprendimas. Pažymėkime $X=x$ ir $Y=2y$. Atėmę iš pirmosios lygčių sistemos

$$\begin{cases} X^3-X^2-Y=0,\\ Y^3-Y^2-X=0 \end{cases}$$

lygties antrąją, gausime

$$X^3-Y^3-(X^2-Y^2)+X-Y=(X-Y)(X^2+Y^2+XY-X-Y+1)=0.$$

Taigi $X=Y$ arba $X^2+Y^2+XY-X-Y+1=0$.

Išnagrinėsime atvejį $X=Y$. Tada $X^3-X^2-X=X(X^2-X-1)=0$. Taigi $X=0$, $X=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ir $X=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Visos trys poros $(X,Y)=(0,0),(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ ir $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ tenkina lygčių sistemą, taigi trys duotosios lygčių sistemos sprendiniai yra $(x,y)=(X,\frac{Y}{2})=(0,0),(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4})$ ir $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4})$.

Įrodysime, kad antrasis atvejis neįmanomas. Iš tikrųjų, padauginę antrąją lygybę iš 2, gauname

$$0 = 2X^2 + 2Y^2 + 2XY - 2X - 2Y + 2 =$$
$$= (X+Y)^2 + X^2 - 2X + Y^2 - 2Y + 2 = (X+Y)^2 + (X-1)^2 + (Y-1)^2.$$

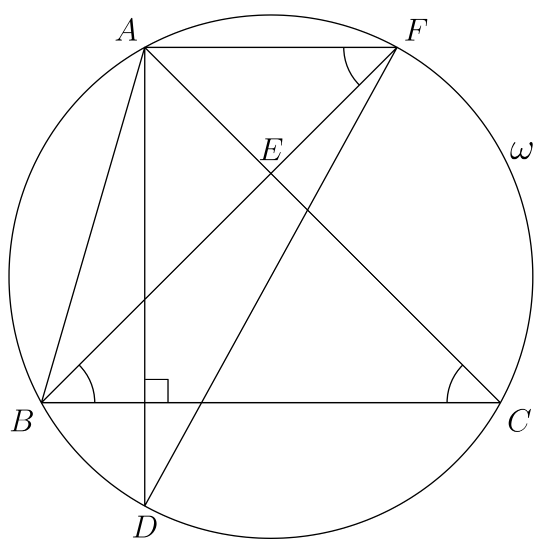
Tai įmanoma tik tada, kai $X + Y = X - 1 = Y - 1 = 0$. Vadinasi, $X = Y = 1$ ir $1 + 1 = 0$, prieštara.

Atsakymas: $(x, y) = (0, 0), (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4})$ ir $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4})$.

6 (11-12 klasės). Apie trikampį ABC, kuriame $AB < AC$, apibėžtas apskritimas ω. Aukštinės, nuleistos iš viršūnės A į pagrindą BC, tęsinys apskritimą ω kerta taške D. Kraštinėje AC pažymėtas toks taškas E, kad $BE = EC$. Atkarpos BE tęsinys apskritimą ω kerta taške F. Įrodykite, kad DF yra apskritimo ω skersmuo.

Sprendimas. Kadangi įbrėžtiniai kampai AFB ir ACB remiasi į tą patį lanką, o trikampis BEC yra lygiašonis, tai

$$\angle AFB = \angle ACB = \angle ECB = \angle EBC = \angle FBC.$$



Vadinasi, tiesės AF ir BC yra lygiagrečios. Kadangi atkarpa AD statmena BC, tai AD statmena ir AF. Taigi trikampis DAF – statusis, todėl jo įžambinė DF yra apibrėžto apie DAF apskritimo ω skersmuo.

7 (11-12 klasės). Balandžio 1 dieną prekybos centre „Ozas“ atsidariusioje „Starbucks“ kavinėje licėjaus pirmokė Hermina įsigijo nuolaidų kortelę, su kuria kasdien pirkdama bent po vieną puodelį kapučino kavos ir vaišindama kava klasės draugus, ji iki pat metų pabaigos (t. y. per 275 dienas) žada nusipirkti lygiai 420 puodelių kavos. Licėjaus ketvirtokė Akvilė tikina, kad tada būtinai atsiras keletas dienų iš eilės (galbūt viena diena), per kurias Hermina nusipirks lygiai 145 puodelius kavos, o mokytojas Benas tvirtina, jog būtinai atsiras keletas dienų iš eilės (galbūt viena diena), per kurias Hermina nusipirks lygiai 125 puodelius kavos.

a) Ar teisi ketvirtokė Akvilė?

b) Ar teisus mokytojas Benas?

Sprendimas. a) Tarkime, kad Hermina per pirmąsias 137 dienas pirko po vieną puodelį kavos per dieną, po to per vieną dieną (rugpjūčio 16 dieną) nusipirko 146 puodelius, ir paskui likusias 137 dienas vėl pirko po vieną puodelį kavos. Iš viso per $137+1+137=275$ dienas ji nusipirko $137+146+137=420$ puodelių (kasdien bent po vieną). Jeigu būtų keletas dienų, per kurias Hermina nusipirko lygiai 145 puodelius kavos, tai „viduriniojі“ diena (rugpjūčio 16 d.) į tas dienas įeiti negali. Vadinasi, tos dienos turėjo būti arba visos ne vėliau kaip rugpjūčio 15 d., arba visos ne anksčiau kaip rugpjūčio 17 d. Tačiau taip būti irgi negali, nes abiem atvejais ji nusipirktų ne daugiau kaip 137 puodelius kavos. Įrodėme, kad perkant kavas taip, kaip šiame pavyzdyje, nėra keleto dienų iš eilės, per kurias Hermina nusipirko lygiai 145 puodelius kavos.

b) Įrodysime, kad visada atsiras keletas dienų iš eilės, per kurias Hermina nusipirks lygiai 125 puodelius kavos. Tegul x_i yra Herminos nusipirktų kavos puodelių skaičius per visas dienas nuo pirmosios (balandžio 1 d.) iki i-tosios. Tada

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{274} < x_{275} = 420.$$

Kadangi

$$126 \leqslant x_1+125 < x_2+125 < \cdots < x_{274}+125 < x_{275}+125 = 545,$$

tai visi natūralieji skaičiai

$$x_1, x_2, \ldots, x_{274}, x_{275}, x_1+125, x_2+125, \ldots, x_{274}+125, x_{275}+125,$$

kurių yra $275+275=550$, priklauso intervalui $[1, 545]$. Vadinasi, bent du iš jų yra lygūs, t. y. $x_j = x_i + 125$. Taigi $x_j - x_i = 125$, o tai reiškia, kad $j > i$ ir per dienas $i+1,\dots,j$ (pradedant nuo $(i+1)$-osios dienos ir baigiant j-tąja diena) Hermina nusipirko lygiai 125 puodelius kavos.

Atsakymas: a) neteisi; b) teisus.

8 (11-12 klasės). Sveikasis skaičius n yra vadinamas *keistu*, jei skaičius n^4+2014 dalijasi iš n^2+2014, o skaičius n^4+2015 dalijasi iš n^2+2015.

a) Nurodykite bent tris keistus skaičius n.

b) Raskite visus keistus skaičius n.

Sprendimas. 1 būdas. Akivaizdu, kad skaičiai $0,1$ ir -1 yra keisti, nes su kiekvienu $n\in\{-1,0,1\}$ galioja lygybės $n^4+2014=n^2+2014$ ir $n^4+2015=n^2+2015$.

Įrodysime, kad daugiau keistų skaičių nėra. Tarkime, kad sveikasis skaičius n yra keistas ir $n\neq -1,0,1$. Tada $n^2\geqslant 4$. Kadangi skaičius n^4+2014 dalijasi iš skaičiaus n^2+2014, tai ir jų skirtumas $n^4+2014-(n^2+2014)=n^4-n^2$ dalijasi iš n^2+2014. Analogiškai, $n^4-n^2=n^4+2015-(n^2+2015)$ dalijasi iš n^2+2015. Natūralieji skaičiai n^2+2014 ir n^2+2015 skiriasi per vienetą, taigi jie neturi bendrų daliklių, didesnių už 1, ir todėl yra tarpusavyje pirminiai. Vadinasi, n^4-n^2 dalijasi ir iš jų sandaugos $(n^2+2014)(n^2+2015)$. Kadangi $n^2>1$, tai skaičius n^4-n^2 yra teigiamas ir mažesnis už n^4, o jo daliklis $(n^2+2014)(n^2+2015)$ yra didesnis už n^4, prieštara.

2 būdas. Jei n keistas skaičius, tai abu skaičiai $(n^4+2015)/(n^2+2015)$ ir $(n^4+2014)/(n^2+2014)$ yra sveikieji. Jų skirtumo modulis S yra lygus

$$\left|\frac{n^4+2015}{n^2+2015}-\frac{n^4+2014}{n^2+2014}\right|=\left|\frac{-n^4+n^2}{(n^2+2015)(n^2+2014)}\right|=\frac{n^2|n^2-1|}{(n^2+2015)(n^2+2014)}.$$

Kadangi $n^2<n^2+2015$ ir $|n^2-1|\leqslant n^2+1<n^2+2014$, tai $S<1$. Be to, $S\geqslant 0$ ir $S\in\mathbb{Z}$. Tai įmanoma tik kai $S=0$, t. y. $n^2|n^2-1|=0$. Vadinasi, $n\in\{-1,0,1\}$. Nesunku įsitikinti, kad visi šie trys skaičiai yra keisti.

Atsakymas: $n=-1,0,1$.