

65-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Šiauliai, 2016 03 22
9–10 klasės

1. Raskite visus lygties $15a^2 - 8ab + b^2 + 8a - 2b + 38 = 0$ sveikuosius sprendinius (a, b) .
2. Trikampio ABC kraštinės tenkina lygybę $AB + BC = 2AC$, kampas B lygus 30° , atkarpa BL yra trikampio pusiaukampinė. Taškai K ir M yra atitinkamai kraštinių AB ir BC vidurio taškai. Raskite kampą KLM .
3. Natūralusis skaičius $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}}$ vadinamas *tvarkingu*, jei jį sudaro dešimt skirtingų skaitmenų x_1, x_2, \dots, x_{10} ($0, 1, \dots, 9$), tenkinančių tokias nelygybes:

$$x_1 > x_2, \quad x_1 > x_3, \quad x_2 > x_4, \quad x_2 > x_5, \quad x_3 > x_6,$$

$$x_3 > x_7, \quad x_4 > x_8, \quad x_5 > x_9 \quad \text{ir} \quad x_5 > x_{10}.$$

- a) Raskite mažiausią tvarkingą skaičių.
 - b) Kiek yra tvarkingų skaičių?
4. Tegul $n \geq 7$ yra toks natūralusis skaičius, kad skaičiai $n - 1$ ir $n + 1$ yra pirminiai. Įrodykite, kad skaičius $n^4 + 16n^2$ dalijasi:
 - a) iš 3;
 - b) iš 720.

11–12 klasės

1. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenkina lygybę

$$f(x^3)f(y^2) = x^2f(xy^2)$$

su visais $x, y \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} – visų realiųjų skaičių aibė).

- Nurodykite bent tris tokias funkcijas f .
 - Raskite visas tokias funkcijas f .
2. Duoti du apskritimai, turintys bendrą centrą. Mažesniojo apskritimo liestinė liečia jį taške B , o didesnįjį apskritimą kerta taškuose A ir C . Taškas D yra atkarpos AB vidurio taškas. Per tašką A nubrėžta tiesė kerta mažesnįjį apskritimą taškuose E ir F ($AE < AF$). Atkarpoje AC pažymėtas toks taškas M , kad $DM = EM$ ir $MC = MF$. Raskite santykį $AM : MC$.
3. Krūvelėje yra 2016 saldainių. Hermina padalija krūvelę į dvi netuščias krūveles, po to bet kurią iš jų (aišku, jei joje yra daugiau kaip vienas saldainis) vėl padalija į dvi netuščias krūveles ir t. t., kol galiausiai lieka 2016 krūvelių po vieną saldainį. Ar visada (kad ir kaip bedalytų Hermina saldainius) bus toks momentas, kai iš visų tuo metu susidariusių krūvelių bus įmanoma:
- pasirinkti 300 krūvelių, kuriose bus lygiai 1000 saldainių?
 - pasirinkti 500 krūvelių, kuriose bus lygiai 1000 saldainių?
4. Sveikasis skaičius n vadinamas *keistu*, jei $\sqrt{3n^2 + 1}$ yra nelyginis sveikasis skaičius.
- Nurodykite bent tris keistus skaičius n .
 - Įrodykite, kad su bet kuriuo keistu skaičiumi n skaičius $2 + 2\sqrt{3n^2 + 1}$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.