66-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Kaunas, 2017 03 17
9–10 klasės

1. Įrodykite, kad
$$x^2 + xy^2 + xyz^2 + 4 \geqslant 4xyz,$$
jei $x, y, z \geqslant 0$.

2. Apie lygiakraštį trikampį ABC apibrėžto apskritimo mažesniajame lanke BC pažymėtas toks taškas M, kad $MB = 21$, $MC = 28$. Tiesės AM ir BC kertasi taške D. Raskite atkarpos MD ilgį.

3. Į lentelės 7×7 langelius surašyti realieji skaičiai taip, kad kiekvieno 3×3 kvadrato visų devynių skaičių sandauga ir kiekvieno 4×4 kvadrato visų šešiolikos skaičių sandauga yra lygi tam pačiam skaičiui S. Ar gali (su bent viena S reikšme) visų keturiasdešimt devynių tos lentelės skaičių sandauga būti lygi 2017?

4. Natūraliųjų skaičių ketvertas (a, b, c, d) tenkina lygčių sistemą
$$\begin{cases} ab - a - b = c + d - 3, \\ cd - c - d = a + b - 3. \end{cases}$$
   a) Raskite bent du tokius ketvertus.
   b) Rasite visus tokius ketvertus.

11–12 klasės

1. Raskite visus realiuosius skaičius x, kurie tenkina tokią sąlygą: bet kuriems realiesiems skaičiams
$$0 < a \leqslant b \leqslant c < a + b$$
teisinga nelygybė
$$x + c \leqslant (x + a)(x + b).$$

2. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle A - \angle B = 90^\circ$. Tegul D yra statmens iš viršūnės C į tiesę AB pagrindas, o M – atkarpos AB vidurio taškas. Įrodykite, kad atkarpos MD ilgis yra lygus apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spinduliui.

3. Verslininkas Ramūnas padovanojo darželio vaikams 2000 balionų. Balionai buvo 20 skirtingų spalvų, po 100 kiekvienos spalvos. Darželio vedėja Austėja davė kiekvienam iš 100 darželį lankančių vaikų 20 balionų, bet neatsižvelgė į jų spalvą. Vaikai norėtų susikeisti balionais taip, kad kiekvienas iš jų turėtų po 20 skirtingų spalvų balionų. Austėja leidžia bet kuriems dviem vaikams susikeisti dviem balionais (kai jie paima vienas iš kito po vieną balioną), tačiau ne bet kaip, o tik kai kiekvienas iš jųdviejų ima iš kito tokios spalvos balioną, kurios jis prieš šiuos jųdviejų mainus neturi. Ar visada (kad ir kaip Austėja pradžioje būtų išdalinusi balionus) vaikai gali taip keistis balionais, kad po baigtinio skaičiaus tokių mainų kiekvienas iš jų turėtų po 20 skirtingų spalvų balionų?

4. Natūralusis skaičius m vadinamas *tvarkingu*, jei su bet kuriais natūraliaisiais skaičiais a ir b skaičius $a^{2m} + b^{2m} + a^m b^m$ dalijasi iš $a^2 + b^2 + ab$.
   a) Įrodykite, kad skaičius 2 yra tvarkingas.
   b) Ar skaičius 100 yra tvarkingas?
   c) Ar skaičius 101 yra tvarkingas?
   d) Raskite visus tvarkingus skaičius.