VILNIAUS UNIVERSITETAS

Artūras Dubickas

XVI, XVII IR XVIII LIETUVOS KOMANDINĖS MATEMATIKOS OLIMPIADOS

Vilnius 2004

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto
Matematikos ir informatikos fakulteto taryba
(2004 m. birželio 8 d., protokolo Nr. 7)

Recenzavo: dr. Romualdas Kašuba

A. Dubickas. XVI, XVII ir XVIII Lietuvos komandinės matematikos olimpiados. Metodinė priemonė. – Vilnius, 2004.

Knygelėje pateiktos 2001 – 2003 m. Lietuvos komandinių matematikos olimpiadų uždavinių sąlygos, jų sprendimai ir atsakymai. Išsamus kiekvieno uždavinio sprendimas buvo vertinamas 5 balais. Be to, uždavinį teisingai išsprendus tik vienai komandai jai buvo pridedami 3 balai, dviem komandoms – po 2 balus, trim komandoms – po 1 balą.

Knygelė skirta moksleiviams, matematikos mokytojams ir studentams matematikams.

2004 09 15. Apimtis 2 leidyb. apsk. l.
Vilniaus universitetas
Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedra
Naugarduko 24
03225 Vilnius
Rinko ir maketavo autorius
Tiražas 100 egz.

Turinys

XVI LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2001 10 06

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS, NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS, leidyklos ALMA LITTERA, AMŽIUS, TEV, TYTO ALBA.

Vertinimo komisija: A. Bastys, A. Birštunas, V. Čekanavičius, R. Didžiapetris, P. Drungilas, A. Dubickas (vertinimo komisijos pirmininkas), M. Galvonas, R. Garunkštis, R. Grigutis, R. Jodelis, M. Juodis, R. Kašuba (organizacinės komisijos pirmininkas), V. Kazakevičius, A. Klivečka, R. Krasauskas, R. Leipus, K. Liubinskas, A. Mačiulis, J. Mačys, H. Markšaitis, G. Murauskas, A. Plikusas, G. Puriuškis, R. Vaicekauskas, R. Zovė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta – **Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjaus pirmajai komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
Vilniaus lic. I	5	5	5	4	6	5	5	5	5	2	0	7	0	5	6	5	0	4	5	4	83	1
KTU gimn. I	1	5	5	5	0	5	5	5	5	4	0	2	0	5	6	5	1	5	5	4	73	2
Minskas	5	1	5	5	6	5	1	5	5	5	0	3	0	5	0	5	0	2	5	5	68	3
VU Fux	5	1	5	0	0	2	4	5	5	5	0	7	0	5	6	0	0	5	3	0	58	–
Šiauliai	1	0	5	5	2	5	2	5	5	5	0	0	0	5	2	5	0	0	5	5	57	4
Panevėžys	5	5	4	5	6	4	5	5	0	0	0	2	0	5	0	5	0	0	5	0	56	5
Utena	5	0	4	5	0	5	2	5	5	1	0	2	0	5	2	5	0	5	3	0	54	6
Vilnius	1	0	0	5	0	2	1	5	5	4	0	2	0	5	4	5	0	5	2	5	51	7
Kretinga	4	2	5	5	0	5	5	5	0	0	0	0	0	5	0	5	4	0	5	0	50	8
Kauno ,,Saulė"	5	5	5	1	0	2	3	5	5	3	0	3	0	0	0	3	1	5	2	1	49	9
KTU gimn. II	2	0	5	5	0	5	2	1	0	2	0	2	0	0	0	5	0	1	2	5	37	10
Pasvalys	5	1	5	4	0	2	0	0	0	5	0	1	0	0	0	5	3	0	0	0	31	11
Vilniaus lic. II	2	5	4	2	0	2	2	0	3	0	0	0	0	1	0	5	1	0	2	1	30	12
Tauragė	0	0	1	1	0	5	2	2	5	0	0	1	0	0	0	1	0	2	2	0	22	13
Viln. ,,Žemyna"	5	0	3	0	0	0	2	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	18	14
Kuršėnai	5	0	5	0	0	2	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	15	15
Raseiniai	5	0	0	0	0	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	12	16

Vilniaus universiteto pirmakursių komanda dalyvavo be konkurso.

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį

$$2001 - 3x^2 = |3x^2 - 2001|.$$

2. Išspręskite lygtį

$$8(\cos x)^2 + \sin 5x = 8(\cos x)^4 + 1.$$

3. Išspręskite lygtį

$$x^3 = 4 + [x].$$

(Čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.)

4. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a^4 + b^4 + 3}{\sqrt{a^4 + b^4 + 2}} > \frac{21}{10},$$

kai a ir b yra bet kokie realieji skaičiai.

5. Raskite mažiausiąją reiškinio

$$5(a^2 + b^2 + 2c^2) - 2(2ab + 6ac + bc - 2a + 3c)$$

įgyjamą reikšmę, kai a, b, c – realieji skaičiai.

6. Raskite visas teigiamųjų skaičių poras (x, y), tenkinančias lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^{2y+x} = y^{3y-5x}, \\ x^3 y = 1. \end{cases}$$

7. Raskite visas sveikąsias m reikšmes, su kuriomis reiškinys

$$\sqrt{m^2 + m + 1}$$

irgi įgyja sveikąsias reikšmes.

8. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis $4^n - 1$ dalijasi iš 7 be liekanos.

9. Tegul

$$a_n = \sqrt{|60\sqrt{11} - 199|} + \sqrt{60\sqrt{11} + 171 + n}.$$

Ar sekoje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yra bent vienas natūralusis skaičius?

10. Raskite visas natūraliąsias reikšmes, kurias įgyja dviejų skirtingų natūraliųjų skaičių sandaugos ir sumos santykis.

11. Ar galima $1/2$ užrašyti baigtine suma $1/n_1^2 + 1/n_2^2 + \ldots + 1/n_\ell^2$, kai $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ – skirtingi natūralieji skaičiai?

12. Raskite visus daugianarius $p(x)$, tokius kad lygybė $p(3x)p(-3x) = 81(x^2-1)^2$ yra teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis.

13. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir įgyja realiąsias reikšmes. Tarkime, kad

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

su visomis realiosiomis x_1 ir x_2 reikšmėmis. Ar visada

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

su visomis realiosiomis x_1, x_2, x_3 reikšmėmis?

14. Šachmatų lentą 6×6 dengia 18 domino kauliukų 2×1. (Vienas kauliukas dengia lygiai du lentos laukelius.) Įrodykite, kad vienu statmenu arba horizontaliu pjūviu lentą galima perpjauti į dvi (nebūtinai lygias) dalis nesugadinant nė vieno domino kauliuko.

15. Įrodykite, kad ant vienetinio apskritimo, kurio centras – koordinačių pradžia, yra be galo daug taškų su racionaliosiomis koordinatėmis.

16. Į kelias dalis padalija plokštumą 2001 tiesė, jei jokios trys tiesės nesikerta viename taške ir jokios dvi tiesės nėra lygiagrečios?

17. Kiek mažiausiai plokštumos taškų su sveikosiomis koordinatėmis uždengia kvadratas, kurio kraštinė yra lygi $2,1$?

18. Tegul M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, O yra apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras, $\widehat{COM} = 90^0$. Įrodykite, kad

$$|\widehat{ABC} - \widehat{BAC}| = 90^0.$$

19. Žinoma, kad į trapeciją, kurios pagrindai yra lygūs 4 ir 16, galima įbrėžti apskritimą bei apie ją galima apibrėžti apskritimą. Raskite tų apskritimų spindulius.

20. Styga, kuri remiasi į 60^0 apskritimo lanką, dalija skritulį į du segmentus. Į mažesnįjį segmentą įbrėžtas kvadratas. Raskite jo kraštinę, jei to apskritimo spindulys yra lygus R.

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Pažymėkime $y = 667 - x^2$ ir padalinkime abi lygties puses iš 3. Gauname, kad $y = |-y| = |y|$. Pastarosios lygties spendinių aibė yra visi neneigiami realieji skaičiai. Vadinasi, $y = 667 - x^2 \geqslant 0$, todėl $-\sqrt{667} \leqslant x \leqslant \sqrt{667}$.

Atsakymas: $-\sqrt{667} \leqslant x \leqslant \sqrt{667}$.

2. Kadangi

$$8(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1 = 8(\cos x)^2((\cos x)^2 - 1) + 1$$

$$= -8(\cos x)^2(\sin x)^2 + 1 = 1 - 2(\sin 2x)^2 = \cos 4x,$$

tai duotoji lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$\sin 5x - \cos 4x = \sin 5x - \sin(\pi/2 - 4x)$$

$$= 2\sin(9x/2 - \pi/4)\cos(\pi/4 + x/2) = 0.$$

Taigi $9x/2 - \pi/4 = \pi k$ arba $\pi/4 + x/2 = \pi/2 + \pi k$ su $k \in \mathbf{Z}$. ($\mathbf{Z}$ visur žymi sveikųjų skaičių aibę.)

Iš pirmosios lygties gauname, kad

$$x = 2(\pi/4 + \pi k)/9 = \pi(4k + 1)/18,$$

o iš antrosios –

$$x = 2(\pi/4 + \pi k) = \pi(4k + 1)/2.$$

Atsakymas: $x \in \{\pi(4k + 1)/2, \pi(4k + 1)/18\}$, kur $k \in \mathbf{Z}$.

3. Pastebėkime, kad su visais $x \geqslant 2$

$$x^3 - [x] > x^3 - x - 1 = (x^2-1)x - 1 \geqslant 3x - 1 > 4.$$

Jei $-1 \leqslant x \leqslant 1$, tai

$$|x^3 - [x]| \leqslant 2 < 4.$$

Pagaliau, jei $x < -1$, tai

$$x^3 - [x] \leqslant x^3 - x = x(x-1)(x+1) < 0.$$

Vadinasi, sprendinių gali būti tik intervale $1 < x < 2$. Tada $[x] = 1$. Iš čia gauname, kad $x^3 = 5$, t.y. $x = 5^{1/3}$. Nesunku įsitikinti, kad šis sprendinys tenkina lygtį.

Atsakymas: $x = 5^{1/3}$.

4. Pažymėkime $x = \sqrt{a^4 + b^4 + 2}$. Tada $a^4 + b^4 + 3 = x^2 + 1$, todėl dešinioji nelygybės pusė yra lygi $x + 1/x$. Kadangi $x \geqslant \sqrt{2}$, o funkcija $x + 1/x$ intervale $x > 1$ didėja, tai dešinioji pusė yra didesnė arba lygi už $\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$. Nelygybė įrodyta, nes šio skaičiaus kvadratas yra lygus $4,5$, o kairiosios pusės kvadratas yra lygus $4,41$.

5. Pastebėkime, kad

$$5a^2 + 5b^2 + 10c^2 - 4ab - 12ac - 2bc + 4a - 6c$$
$$= (a-2b)^2 + (b-c)^2 + 4a^2 + 9c^2 - 12ac + 4a - 6c$$
$$= (a-2b)^2 + (b-c)^2 + (2a - 3c + 1)^2 - 1.$$

Reiškinio $R = (a-2b)^2 + (b-c)^2 + (2a-3c+1)^2$ mažiausioji įgyjama reikšmė yra lygi 0, nes trijų kvadratų suma yra neneigiama, o reikšmę 0 šis reiškinys įgyja, kai $a = -2$, $b = c = -1$. Vadinasi, reiškinio $R - 1$ mažiausioji įgyjama reikšmė yra lygi -1.

Atsakymas: -1.

6. Kadangi $y = x^{-3}$, tai duotoji sistema yra ekvivalenti lygčiai

$$x^{2/x^3 + x + 3(3/x^3 - 5x)} = x^{11/x^3 - 14x} = 1.$$

Todėl $x = 1$ arba $11/x^3 = 14x$, t.y. $x = (11/14)^{1/4}$, kadangi $x > 0$. Atitinkamai, $y = 1$ ir $y = (11/14)^{-3/4}$.

Atsakymas: $(x, y) = (1, 1), ((11/14)^{1/4}, (11/14)^{-3/4})$.

7. *1 būdas.* Pastebėkime, kad su kiekvienu $m > 0$

$$m < \sqrt{m^2 + m + 1} < m + 1,$$

o su kiekvienu $m < -1$

$$-m - 1 < \sqrt{m^2 + m + 1} < -m.$$

Likusios dvi reikšmės $m = -1$ ir $m = 0$ tenkina reikalaujamą sąlygą.

2 būdas. Pažymėkime $\sqrt{m^2 + m + 1} = n$. Keliame šią lygybę kvadratu ir padauginame iš 4: $(2n)^2 = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3$. Vadinasi,

$$(2n - 2m - 1)(2n + 2m + 1) = 3.$$

Galimi keturi varijantai $2n - 2m - 1 = 1$, -1, 3, -3. Atitinkamai, $2n + 2m + 1 = 3$, -3, 1, -1. Atimdami iš antrosios lygties pirmąją gauname, kad $4m + 2 = 2$ arba -2. Vadinasi, galimos tik dvi reikšmės $m = -1$ ir $m = 0$.

Atsakymas: $m \in \{-1, 0\}$.

8. *1 būdas.* Skaičiuojame seką 4^n, $n = 1, 2, \ldots$, moduliu 7: gauname periodinę seką $4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$. Atitinkamai, $4^n - 1$, kai $n = 1, 2, \ldots$, moduliu 7 yra $3, 1, 0, 3, 1, 0, \ldots$. Vadinasi, $4^n - 1$ dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai n dalijasi iš 3.

2 būdas. Tegul k – natūralusis skaičius. Aišku, kad skaičius $4^{3k} - 1$ dalijasi iš $4^3 - 1 = 63$, todėl jis dalijasi ir iš 7. Vadinasi, jei n dalijasi iš 3, tai $4^n - 1$ dalijasi iš 7 be liekanos.

Jei n nesidalija iš 3, tai $n = 3k + 1$ arba $n = 3k + 2$ su neneigiamu sveikuoju skaičiumi k. Mes jau žinome, kad koks bebūtų sveikasis neneigiamas skaičius k, visada atsiras toks $m \in \mathbf{Z}$, kad $4^{3k} - 1 = 7m$. Aišku, kad

$$4^{3k+1} - 1 = 4(4^{3k} - 1) + 3 = 28m + 3$$

ir

$$4^{3k+2} - 1 = 16(4^{3k} - 1) + 15 = 7(16m + 2) + 1$$

nesidalija iš 7.

Atsakymas: kai n dalijasi iš 3 be liekanos.

9. Kadangi $|60\sqrt{11} - 199| = 100 - 60\sqrt{11} + 99 = (10 - 3\sqrt{11})^2$ ir $60\sqrt{11} + 199 = (10 + 3\sqrt{11})^2$, tai

$$a_{28} = 10 - 3\sqrt{11} + 10 + 3\sqrt{11} = 20.$$

Atsakymas: taip.

10. Jei $n > 1$, tai n yra dviejų skirtingų natūraliųjų skaičių $n+1$ ir $n(n+1)$ sandaugos ($= n(n+1)^2$) ir sumos ($= n + 1 + n(n+1) = (n+1)^2$) santykis.

Tarkime, kad $n = 1$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą. Tada $xy = x + y$, t.y. $1 = (x-1)(y-1)$. Kadangi x ir y yra natūralieji skaičiai, tai $x - 1 = y - 1 = 1$, t.y. $x = y = 2$. Tačiau x ir y yra skirtingi, prieštara.

Atsakymas: $n > 1$.

11. Padauginę iš 3600, galime nesunkiai įsitikinti, kad teisinga lygybė

$$1/2 = 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/12^2$$
$$+1/14^2 + 1/21^2 + 1/36^2 + 1/45^2 + 1/60^2.$$

Atsakymas: taip.

12. Tegul $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$, tenkina uždavinio sąlygą. Imdami pakankamai didelį x gauname, kad $n = 2$, t.y. $p(x) = ax^2 + bx + c$. Kadangi

$$p(3x)p(-3x) = (9ax^2 + c)^2 - (3bx)^2$$
$$= 81a^2x^2 + (18ac - 9b^2)x + c^2 = 81x^2 - 162x^2 + 81,$$

tai $a^2 = 1$, $2ac - b^2 = -18$, $c^2 = 81$. Vadinasi, $a = \pm 1$, $c = \pm 9$. Kai a ir c turi vienodus ženklus, tai $b = \pm 6$, o kai skirtingus – $b = 0$. Vadinasi, tapatybę tenkina šeši daugianariai $p(x)$: $x^2 - 9$, $-x^2 + 9$, $x^2 \pm 6x + 9$, $-x^2 \pm 6x - 9$.

Atsakymas: $x^2 - 9$, $-x^2 + 9$, $x^2 + 6x + 9$,
$x^2 - 6x + 9$, $-x^2 + 6x - 9$, $-x^2 - 6x - 9$.

13. Pakeitę x_1 į $(y_1 + y_2)/2$, o x_2 į $(y_3 + y_4)/2$ ir du kartus pritaikę nelygybę gauname, kad

$$f\left(\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right) \leqslant \frac{f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) + f(y_4)}{4}.$$

Atskiru atveju, kai $y_4 = (y_1 + y_2 + y_3)/3$, turime

$$4f(y_4) \leqslant f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) + f(y_4).$$

Vadinasi, su visais realiaisias y_1, y_2, y_3 , turime

$$3f(y_4) = 3f\big(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\big) \leqslant f(y_1) + f(y_2) + f(y_3).$$

Atsakymas: visada.

14. Įsivaizduokime tas 5 vertikalias ir tas 5 horizontalias tieses, kurios kerta lentą nekirsdamos šachmatų lentos langelių. Įrodysime, kad bent viena iš jų tenkina uždavinio sąlygą. Tarkime priešingai, kad kiekviena iš šių 10 tiesių kerta bent po vieną domino kauliuką. Aišku, kad kiekviena tiesė gali kirsti tik lyginį domino kauliukų skaičių. (Priešingu atveju, abiejuose tiesės pusėse lieka nelyginis langelių skaičius, kurių negalima uždengti 2×1 kauliukais.) Be to, kiekviena tiesė kerta skirtingus kauliukus. Taigi, kiekviena tiesė kerta bent po 2 kauliukus, o jos visos bent 20 kauliukų. Tačiau iš viso tėra tik 18 kauliukų! Prieštara.

15. Pakanka įrodyti, kad lygtis $x^2 + y^2 = 1$ turi be galo daug racionaliųjų sprendinių. Nesunku įsitikinti, kad, pavyzdžiui,

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2.$$

Vadinasi, pora $x_n = 2n/(n^2+1)$, $y_n = (n^2-1)/(n^2+1)$ tenkina lygtį $x_n^2 + y_n^2 = 1$ su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n. Kai n didėja, $2n/(n^2+1)$ mažėja, vadinasi visi skaičiai x_n yra skirtingi. Todėl racionaliųjų porų (x_n, y_n) yra be galo daug.

16. Tarkime, kad n tokių tiesių dalija plokštumą į $d(n)$ dalių. Aišku, kad $d(1) = 2$. Be to, $d(n) - d(n-1) = n$, kai $n \geqslant 3$. (Kai n toji tiesė kerta $n-1$ jau esančią plokštumoje, tai visada atsiranda n naujų plokštumos dalių. Tai akivaizdu, jei įsivaizduosime, kad "naująją" tiesę nubrėžiame taip, kad visi "senųjų" tiesių susikirtimo taškai lieka "toli viršuje".) Remdamiesi indukcija, nesunkiai įsitikiname, kad $d(n) = 1 + n(n+1)/2$. Vadinasi, $d(2001) = 2003002$.

Atsakymas: 2003002.

17. 1 pav. pavaizduotas kvadratas $ABCD$ dengia du taškus su sveikosiomis koordinatėmis M ir N.

1 pav.

Iš tiesų, taškas P nepriklauso kvadratui, nes

$$NQ = NB \tan 45^0 = OB - ON = 21/10\sqrt{2} - 1/2 < 1 = NP.$$

Kita vertus, į kvadratą, kurio kraštinė lygi 2 ($2 < 2,1$), įbrėžtas skritulys jau dengia ne mažiau kaip 2 taškus su sveikosiomis koordinatėmis. Iš tiesų jo skersmuo yra lygus 2, todėl tokio skritulio centras patenka į viena iš trikampių, parodytų 2 pav., ir tą trikampį uždengia.

2 pav.

Atsakymas: 2 taškus.

18. Pratęskime CO iki susikirtimo su apibrėžtu apie trikampį ABC apskritimu (3 pav.).

3 pav.

Aišku, kad $\widehat{CBD} = 90^0$ ir $\widehat{BCD} = \widehat{ABC}$, todėl

$$\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{CDB} = 180^0 - (90^0 - \widehat{BCD}) = 90^0 + \widehat{ABC}.$$

Taigi $\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90^0$. Sukeitę A ir B vietomis gautume lygybę $\widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 90^0$. Abiem atvejais, $|\widehat{ABC} - \widehat{BAC}| = 90^0$, ką ir reikėjo įrodyti.

19. Kadangi apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą, tai trapecija lygiašonė $AB = CD$ (4 pav.). Kadangi į ją taip pat galima ir įbrėžti apskritimą, tai

4 pav.

$$AB = (AB + CD)/2 = (BC + AD)/2 = (4 + 16)/2 = 10.$$

Be to, $ED = (AD - BC)/2 = 6$. Iš stačiojo trikampio DEC ,

$$CE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

todėl įbrėžtojo apskritimo spindulys yra lygus 4. Iš stačiojo trikampio AEC ,

$$AC = \sqrt{10^2 + 8^2} = 2\sqrt{41}.$$

Be to, $\sin \widehat{D} = CE/CD = 4/5$. Apibrėžtasis apie trapeciją apskritimas sutampa su apibrėžtu apie trikampį ACD apskritimu. Remiantis sinusų teorema, gauname, kad jo spindulys yra lygus

$$AC/(2\sin \widehat{D}) = 5\sqrt{41}/4.$$

Atsakymas: įbrėžto spindulys lygus 4 , o apibrėžto – $5\sqrt{41}/4$.

20. Trikampis ABO (5 pav.) yra statusis, todėl $OB = OA\cos 30^0 = R\sqrt{3}/2$. Pažymėkime $BC = x$. Trikampis OCD statusis, todėl

5 pav.

$$R^2 = (R\sqrt{3}/2 + x)^2 + (x/2)^2 = 3R^2/4 + Rx\sqrt{3} + 5x^2/4.$$

Lygtis $5x^2 + 4xR\sqrt{3} - R^2 = 0$ turi vienintelį sprendinį, mažesnį už R , $x = R(\sqrt{17} - 2\sqrt{3})/5$.

Atsakymas: $R(\sqrt{17} - 2\sqrt{3})/5$.

XVII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2002 09 28

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS, NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS, leidyklos ALMA LITTERA, AMŽIUS, TEV, TYTO ALBA.

Vertinimo komisija: G. Alkauskas, A. Bastys, A. Birštunas, D. Celovas, V. Čekanavičius, S. Dapkūnas, R. Didžiapetris, A. Domarkas, P. Drungilas, A. Dubickas (vertinimo komisijos pirmininkas), R. Garunkštis, R. Grigutis, M. Juodis, K. Karčiauskas, R. Kašuba (organizacinės komisijos pirmininkas), A. Kaučikas, V. Kazakevičius, D. Kulvičius, R. Lapinskas, R. Leipus, A. Mačiulis, J. Mačys, H. Markšaitis, A. Novikas, A. Plikusas, A. Posochovas, G. Puriuškis, E. Stankus, V. Vitkauskas, R. Zovė, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta – **Kauno technologijos universiteto gimnazijos pirmajai komandai.**

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
KTU gimn. I	5	2	6	6	5	5	7	5	0	5	6	5	0	6	3	5	5	2	0	6	84	1
Minskas	5	1	2	0	4	5	7	5	0	5	0	5	0	6	3	5	1	7	0	6	67	2
Vilniaus lic. I	5	4	6	6	5	4	0	5	0	5	6	1	0	0	3	4	5	1	0	1	61	3
Kretinga	5	3	6	0	4	5	0	5	0	5	0	5	0	1	3	4	5	0	0	1	52	4
Panevėžys	5	3	1	6	5	1	0	5	0	5	6	1	0	0	0	5	0	7	0	1	51	5
Pasvalys	5	3	0	0	2	0	1	5	0	5	0	5	0	6	0	4	5	1	0	2	44	6
Visaginas	1	0	0	0	5	5	0	5	0	5	0	1	0	0	0	5	1	4	0	0	32	7
KTU gimn. II	0	0	2	0	0	0	0	5	0	5	0	5	0	0	0	4	0	2	0	6	29	8
Kauno „Saulė"	1	0	1	0	1	0	1	5	0	5	0	5	0	0	1	4	1	2	1	0	28	9-10
Šiauliai	0	3	1	0	1	0	2	5	0	5	0	1	0	0	3	5	1	0	0	1	28	9-10
Viln. „Žemyna"	0	0	1	0	0	5	0	5	0	5	0	1	0	0	1	4	1	1	0	0	24	11
Vilniaus lic. II	0	0	0	0	4	0	0	5	0	5	0	0	0	0	0	3	5	1	0	0	23	12
Vilnius	0	0	0	0	3	0	3	5	0	0	0	5	0	0	0	4	0	1	0	0	21	13
Raseiniai	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5	0	2	0	0	0	4	1	2	0	0	15	14
Utena	0	0	1	0	0	0	0	5	0	1	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	11	15

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį
$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^3 + y^3 = 2. \end{cases}$$

3. Raskite visus teigiamųjų skaičių ketvertus (x, y, z, t), tenkinančius lygčių sistemą
$$\begin{cases} x + y - zt = 0, \\ xy - z - t = 0, \\ xyzt = 16. \end{cases}$$

4. Realieji skaičiai x, y, z, t tenkina nelygybes $x+y+z+t < 0$, $xy+xz+xt+yz+yt+zt > 0$, $xyz+xyt+xzt+yzt < 0$ ir $xyzt > 0$. Įrodykite, kad $x, y, z, t < 0$.

5. Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $x-xy$, $y-yz$, $z-xz$ neviršija $1/4$, kai $x, y, z \geqslant 0$.

6. Realiojo skaičiaus $x \neq 0$ atvirkštiniu yra vadinamas skaičius $1/x$. Yra žinoma, kad keturių nenulinių skaičių ir jų atvirkštinių sumos abi yra lygios nuliui. Įrodykite, kad tarp tų keturių skaičių atsiras du, kurių suma yra lygi nuliui.

7. Raskite mažiausiąją funkcijos $f(x) = -2\sqrt{3}\cos(3x)\sin(6x)$ įgyjamą reikšmę, kai x – realusis skaičius.

8. Įrodykite, kad $10^n + 45n - 1$ dalijasi iš 27, kai n – natūralusis skaičius.

9. Įrodykite, kad egzistuoja natūralusis skaičius n, toks kad skaičiaus 2^n dešimtainėje išraiškoje yra ne mažiau kaip 2002 iš eilės einantys nuliai.

10. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas, trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas, o penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis.

11. Tegul $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = (a_n a_{n-1} + 1)/a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Įrodykite, kad $a_n > \sqrt{2n}$, kai $n \geqslant 3$.

12. Ar egzistuoja sveikieji skaičiai a ir b, tokie kad skaičiai

$$(a+1/2)^n + (b+1/2)^n$$

taip pat būtų sveikieji su kiekvienu natūraliuoju n ?

13. Ar egzistuoja 100 laipsnio daugianaris $p(x)$ su realiaisiais koeficientais, toks kad

$$p(0) > |p(1)| + |p(2)| + \ldots + |p(2001)| + |p(2002)|?$$

14. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas su kiekvienu realiuoju x, tenkinančias sąlygas

$$f(f(x)) = x, \quad f(1+f(x)) = 1-x.$$

15. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje, tenkinančias sąlygą

$$f(x^2+y^2-2xy) = f(x)^2 + y^2 - 2xf(y).$$

16. Per metus mokyklos bibliotekoje apsilankė 410 mokinių. Jie visi kartu paėmė 5081 knygą. Ar galima tvirtinti, kad atsiras 18 mokinių, kurie visi kartu paėmė ne mažiau kaip 224 knygas?

17. Šachmatų lentoje 8×8 karalius gali eiti tik per vieną langelį į kairę, per vieną langelį į apačią arba per vieną langelį įstrižaine aukštyn–dešinėn. Ar jis gali 64 ėjimais apeiti visą lentą taip, kad kiekviename langelyje apsilankytų po vieną kartą ir sugrįžtų į pradinį langelį?

18. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti į vienetinį apskritimą įbrėžto keturkampio kraštinių sandauga?

19. Į smailųjį trikampį ABC įbrėžto kvadrato, kurio dvi viršūnės priklauso kraštinei BC, o kitos dvi priklauso AB ir AC, kraštinė yra lygi a. Analogiškai, tegul b ir c yra kraštinės dar dviejų kvadratų, kurių po dvi viršūnes priklauso atitinkamai AC ir AB, o kitos dvi – atitinkamai AB, BC ir AC, BC. Įrodykite, kad

$$\frac{BC}{a} + \frac{AC}{b} + \frac{AB}{c} > 5 + \sqrt{2}.$$

20. Yra žinoma, kad bet kokie keturi iš penkių plokštumoje nubrėžtų apskritimų turi bent vieną bendrą tašką. Ar visada tie penki apskritimai turi bent vieną bendrą tašką?

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Įrodysime, kad lygtis neturi realiųjų sprendinių. Jei $x \leqslant 0$ arba $x \geqslant 1$, tai $x^4 \geqslant x$ ir nelygybė $1 + x^4(1 + x^8) > x(1 + x^8)$ yra akivaizdi. Jei $0 < x < 1$, tai

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1 - x) + x^4(1 - x^5) + x^{12} > 0,$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Atsakymas: $\emptyset$.

2. Pažymėkime $x + y = s$, $xy = t$. Kadangi $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ir $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$, tai $s^2 - 2t = 2$ ir $s(2 - t) = 2$. Vadinasi, $t = -1 + s^2/2$ ir $s^3 - 6s + 4 = 0$. Kadangi

$$s^3 - 6s + 4 = (s - 2)(s^2 + 2s - 2),$$

tai trys galimos s reikšmės yra $s_1 = 2$, $s_2 = -1 + \sqrt{3}$ ir $s_3 = -1-\sqrt{3}$. Atitinkamai, $t_1 = 1$, $t_2 = 1-\sqrt{3}$ ir $t_3 = 1+\sqrt{3}$. Realusis lygčių sistemos $x + y = s$, $xy = t$ sprendinys egzistuoja tada ir tik tada, kai $s^2 - 4t \geqslant 0$. Kadangi $s_3 - 4t_3 < 0$, tai lieka du atvejai $x + y = 2$, $xy = 1$, t. y. $x = y = 1$, ir $x + y = -1 + \sqrt{3}$, $xy = 1 - \sqrt{3}$, t. y. $x = (-1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}})/2, y = (-1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}})/2$ arba $x = (-1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}})/2, y = (-1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}})/2$.

Atsakymas: $(x, y) = (1, 1)$,
$((-1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}})/2, (-1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}})/2)$,
$((-1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}})/2, (-1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}})/2)$.

3. Pažymėkime $x + y = a$ ir $xy = b$. Tada $z + t = b$, $zt = a$ ir $ab = 16$. Iš nelygybės $0 \leqslant (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = a^2 - 4b = a^2 - 64/a$ gauname, kad $a \geqslant 4$. Kita vertus, $0 \leqslant (z - t)^2 = (z + t)^2 - 4zt =$

$b^2 - 4a = b^2 - 64/b$, todėl $b \geqslant 4$. Vadinasi, $a = b = 4$, iš kur gauname, kad ketvertas $x = y = z = t = 2$ yra vienintelis.

Atsakymas: $(x, y, z, t) = (2, 2, 2, 2)$.

4. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad

$$f(s) = (s-x)(s-y)(s-z)(s-t) = s^4 - (x+y+z+t)s^3$$

$$+(xy+xz+xt+yz+yt+zt)s^2 - (xyz+xyt+xzt+zyt)s + xyzt > 0,$$

kai $s \geqslant 0$. Vadinasi, visos keturios daugianario $f(s)$ šaknys, x, y, z, t, yra neigiamos.

5. Jei $x > 1$, tai $z - xz \leqslant 0 < 1/4$. Be to, jei $y > 1$, tai $x - xy \leqslant 0$, o jei $z > 1$, tai $y - yz \leqslant 0$. Laikykime, kad $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Tada $0 \leqslant x(1-x) = 1/4 - (1/2 - x)^2 \leqslant 1/4$. Analogiškai, skaičiai $y(1-y)$ ir $z(1-z)$ yra neneigiami ir neviršija $1/4$. Vadinasi, $x(1-x)y(1-y)z(1-z) \leqslant 1/64$. Jei būtų teisingos nelygybės $x - xy > 1/4$, $y - yz > 1/4$ ir $z - xz > 1/4$, tai

$$x(1-x)y(1-y)z(1-z) = (x-xy)(y-yz)(z-xz) > 1/64,$$

prieštara.

6. Tegul $x+y+z+t = 0$ ir $1/x+1/y+1/z+1/t = 0$. Tarkime, kad $x + y \neq 0$. Kadangi $0 = (x+y)/xy + (z+t)/zt = (x+y)/xy - (x+y)/zt = (x+y)(1/xy - 1/zt)$, tai $xy = zt = (-z)(-t)$. Be to, $x+y = (-z)+(-t)$. Vadinasi, kvadratinės lygties $s^2-(x+y)s+xy = 0$ sprendiniai yra ne tik x, y, bet ir $-z, -t$. Todėl $x = -z$ arba $x = -t$, ką ir reikėjo įrodyti.

7. Kadangi

$$f(x) = -4\sqrt{3}\sin(3x)\cos^2(3x) = -4\sqrt{3}\sin(3x)(1 - \sin^2(3x)),$$

tai mažiausioji funkcijos $f(x)$ įgyjama reikšmė sutampa su mažiausiąja funkcijos $g(z) = -4\sqrt{3}z(1-z^2)$ įgyjama reikšme intervale $[-1, 1]$. Aišku, kad $g'(z) = -4\sqrt{3}(1-3z^2) = 0$, kai $z = \pm 1/\sqrt{3}$. Kadangi $g(\pm 1) = 0$, $g(-1/\sqrt{3}) > 0$, $g(1/\sqrt{3}) = -8/3$, tai ieškomoji (mažiausioji) reikšmė yra lygi $-8/3$.

Atsakymas: $-8/3$.

8. Pastebėkime, kad $(10^n + 45n - 1)/9 = N + 5n$, kur $N = \overline{1\ldots 1}$ yra sudarytas iš n vienetų. Kadangi bet kokio natūraliojo skaičiaus ir jo skaitmenų sumos skirtumas visada dalijasi iš 3, o skaičiaus N skaitmenų suma yra lygi n, tai $N + 5n = (N - n) + 6n$ dalijasi iš 3, ką ir reikėjo įrodyti.

9. Tegul k yra natūralusis skaičius. Įrodysime, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius m, kad $2^m - 1$ dalijasi iš $N = 5^k$. Iš tiesų, dalijant $N+1$ skaičių $1-1, 2-1, 2^2-1, 2^3-1, \ldots 2^N-1$ iš N gausime bent dvi vienodas liekanas. Tų skaičių skirtumas $(2^i-1)-(2^j-1) = 2^j(2^{i-j} - 1)$ dalijasi iš N. Vadinasi, $2^{i-j} - 1$ dalijasi iš N, todėl pakanka paimti $m = i - j$. Iš čia išplaukia, kad $2^{m+k} - 2^k$ dalijasi iš 10^k. Parinkime k tokį, kad $5^k > 10^{2002}$. Dešimtainėje skaičiaus 2^k išraiškoje yra ne daugiau kaip $k - 2002$ skaitmenys, kadangi $2^k = 10^k/5^k < 10^{k-2002}$. Kadangi paskutinieji k skaičiaus 2^{m+k} skaitmenys sutampa su paskutiniaisiais k skaičiaus 2^k skaitmenimis (prirašius pastarojo skaičiaus priekyje nulius), tai tarp k paskutiniųjų 2^{m+k} skaitmenų bus $\geqslant k - (k - 2002) = 2002$ iš eilės einantys nuliai, ką ir reikėjo įrodyti.

10. Užrašykime tą skaičių jo pirminių daugiklių sandauga

$$n = 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e \ldots,$$

kur $a, b, c, d, e, \ldots$ yra sveikieji neneigiami skaičiai. Aišku, kad pakeitę skaičius $d, e, \ldots$ nuliais mes skaičiaus n nepadidinsime ir nepakeisime jo savybės $n/2, n/3, n/5$ būti atitinkamai pilnu kvadratu, kubu ir penktuoju laipsniu. Todėl galime laikyti, kad $n = 2^a 3^b 5^c$, kur $a, b, c > 0$. Kadangi $n/2$ yra kvadratas, tai skaičiai $a - 1, b, c$ turi yra lyginiai. Analogiškai, $a, b - 1, c$ dalijasi iš 3, o $a, b, c - 1$ – iš 5. Vadinasi, a dalijasi iš 15, b – iš 10, o c – iš 6. Taigi $n \geqslant 2^{15} 3^{10} 5^6$. Skaičius $2^{15} 3^{10} 5^6$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $2^{15} 3^{10} 5^6 = 30233088000000$.

11. Kadangi $a_n > a_{n-1}$ ir $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n/a_{n-1} + 1/a_{n-1}^2 > a_n^2 + 2$, kai $n \geqslant 2$, tai koks bebūtų $n \geqslant 3$, sudėdami nelygybes $a_n^2 - a_{n-1}^2 > 2$, $a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2 > 2$, $\ldots$, $a_3^2 - a_2^2 > 2$, gauname $a_n^2 - a_2^2 > 2(n - 2)$. Vadinasi, $a_n^2 > a_2^2 + 2(n-2) = 4 + 2(n-2) = 2n$, todėl $a_n > \sqrt{2n}$.

12. *1 būdas*. Įrašę $n = 2$ matome, kad

$$(a+1/2)^2 + (b+1/2)^2 = a^2 + a + b^2 + b + 1/2$$

nėra sveikasis skaičius.

2 būdas. Pažymėkime $x_n = (a+1/2)^n + (b+1/2)^n$. Jei $a = b$, tai $x_n = (2a+1)^n/2^{n-1}$ nėra sveikasis skaičius, kai $n > 1$. Tegul $a \neq b$. Tarkime, kad m yra toks natūralusis skaičius, kad $a - b$ nesidalija iš 2^m. Jei abu skaičiai x_{m+1} ir x_{m+2} būtų sveikieji, tai sveikasis būtų ir skaičius

$$2x_{m+2} - (2b+1)x_{m+1} = (2a+1)^{m+1}(a-b)/2^m.$$

Tačiau $a-b$ nesidalija iš 2^m, o $(2a+1)^{m+1}$ yra nelyginis skaičius, todėl dešinioji pusė nėra sveikasis skaičius, prieštara.

Atsakymas: ne.

13. Toks daugianaris egzistuoja. Pažymėkime

$$q(x) = 1/2 + \cos(\arccos x) + \cos(2\arccos x) + \ldots + \cos(25\arccos x).$$

Aišku, kad $q(x)$ yra 25 laipsnio daugianaris. Įrodysime, kad

$$p(x) = q(1 - x/1001)^4$$

tenkina uždavinio sąlygą. Kadangi $p(x)$ yra 100 laipsnio daugianaris ir $p(0) = q(1)^4 = (1/2 + 25)^4$, pakanka įrodyti, kad

$$\sum_{j=1}^{2002} q(1 - j/1001)^4 < (51/2)^4.$$

Pažymėkime $t = \arccos x$. Kadangi

$$2\sin(t/2)\cos(\ell t) = \sin((\ell + 1/2)t) - \sin((\ell - 1/2)t),$$

tai

$$2q(x)\sin(t/2) = \sin(t/2) + \sin(3t/2) - \sin(t/2)$$
$$+ \ldots + \sin(51t/2) - \sin(49t/2) = \sin(51t/2).$$

Vadinasi, $2|q(x)\sin(t/2)| \leqslant 1$, kai $-1 \leqslant x < 1$. Be to,

$$2|\sin(t/2)| = \sqrt{2(1-\cos t)} = \sqrt{2(1-x)},$$

todėl su kiekvienu $j = 1, 2, \ldots, 2002$ yra teisinga nelygybė

$$|q(1-j/1001)|^4 \leqslant (1/\sqrt{2j/1001})^4 = 1001^2/4j^2.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\sum_{j=1}^{2002} q(1-j/1001)^4 < \frac{1001^2}{4}\sum_{j=1}^{2002}\frac{1}{j^2}.$$

Kadangi

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{241}{144},$$

tai

$$\frac{1001^2}{4}\sum_{j=1}^{2002}\frac{1}{j^2} < \frac{1001^2\cdot 241}{4\cdot 144} = 241(1001/24)^2 < (51/2)^4,$$

nes $51^2 \cdot 6/1001 = 15606/1001 > 15,59 > \sqrt{241}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Atsakymas: taip.

14. *1 būdas*. Pažymėkime $f(1/2) = s$. Tada $f(1+s) = f(1+f(1/2)) = 1 - 1/2 = 1/2$. Todėl $s = f(1/2) = f(f(1+s)) = 1 + s$, prieštara.

2 būdas. Turime $f(1-x) = f(f(1+f(x))) = 1 + f(x)$. Įrašę $x = 1/2$ gauname prieštarą.

Atsakymas: $\emptyset$.

15. Jei $x = y = 0$, tai $f(0) = f(0)^2$, todėl $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Pirmuoju atveju, $f(0) = 0$, įrašę $x = y$, gauname $0 = f(x)^2 + x^2 -$

$2xf(x) = (f(x) - x)^2$. Todėl $f(x) = x$. Antruoju atveju, $f(0) = 1$, įrašome $x = 0$. Gauname, kad $f(y^2) = 1 + y^2$, todėl $f(x) = x + 1$, kai $x \geqslant 0$. Taigi $(x - y)^2 + 1 = (x + 1)^2 - 2xf(y) + y^2$, jei $x \geqslant 0$. Įrašydami $y = -x$, gauname $4x^2 + 1 = (x + 1)^2 - 2xf(-x) + x^2$, t. y.

$$f(-x) = (4x^2 + 1 - (x + 1)^2 - x^2)/(-2x) = -x + 1,$$

kai $x < 0$. Vadinasi, antruoju atveju, su visais realiaisiais x yra teisinga lygybė $f(x) = x + 1$. Abiem atvejais gautos funkcijos tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $f(x) = x$ ir $f(x) = x + 1$.

16. Pažymėkime x_i, $i = 1, 2, \ldots, 410$, $i-$ tojo mokinio paimtų knygų skaičių. Galime laikyti, kad $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{410}$. Akivaizdu, kad

$$(x_1 + \ldots + x_{18})/18 \geqslant (x_1 + \ldots + x_{410})/410 = 5081/410.$$

Todėl $x_1 + \ldots + x_{18} \geqslant 5081 \cdot 18/410 > 223$. Kadangi $x_1 + \ldots + x_{18}$ yra sveikasis skaičius, tai jis yra didesnis arba lygus už 224.

Atsakymas: taip.

17. Tarkime, kad karalius x kartų paėjo kairėn, y kartų apačion, z kartų įstrižaine aukštyn–dešinėn ir sugrįžo į pradinę padėtį. Aišku, kad jei $x > z$, tai karalius bus kairiau, o jei $x < z$ – dešiniau. Vadinasi, $x = z$. Analogiškai, $y = z$. Todėl $x = y = z$, kas prieštarauja lygybei $x + y + z = 64$, nes 64 nesidalija iš 3.

Atsakymas: negali.

18. Įrodysime, kad didžiausia reikšmė yra įgyjama, kai keturkampis $ABCD$ yra kvadratas, taigi ji yra lygi 4. Tarkime, kad taip nėra, t. y. egzistuoja keturkampis, kurio kraštinių sandauga S yra didesnė už 4. Tegul O yra apskritimo centras. Jei O yra keturkampio $ABCD$ išorėje, tai, pastumdami arčiausiai O esančią kraštinę link taško O, mes padidintume tris keturkampio kraštines, o ketvirtoji liktų nepakitusi, prieštara. Taigi kampų AOB, BOC, COD ir DOA, kuriuos mes pažymėsime atitinkamai α, β, γ ir δ, suma yra lygi 360^0. Keturkampio $ABCD$ kraštinių sandauga yra lygi

$$S = 16 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) \sin(\delta/2).$$

Pastebėkime, kad yra teisinga nelygybė $\sin x \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))/2 \leqslant (1-\cos(x+y))/2 = \sin^2((x+y)/2)$. Tris kartus pritaikę šią nelygybę gauname, kad

$$S \leqslant 16\sin^4((\alpha+\beta+\gamma+\delta)/8) = 16\sin^4 45^0 = 4,$$

prieštara.

Atsakymas: 4.

19. Pažymėkime trikampio kampus α, β ir γ. Aišku, kad $BC = a + a\cot\beta + a\cot\gamma$. Be to, $AC = b(1+\cot\alpha+\cot\gamma)$, $AB = c(1+\cot\alpha+\cot\beta)$, todėl kairioji nelygybės pusė yra lygi

$$3 + 2(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma).$$

Čia $0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^0$. Iš nelygybės $\cot x + \cot y \geqslant 2\cot((x+y)/2)$, kuri yra ekvivalenti nelygybei $\sin x \sin y \leqslant \sin^2((x+y)/2)$ (žr. 18 uždavinį), išplaukia, kad kotangentų suma yra mažiausia, kai $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$. Vadinasi, kairioji nelygybės pusė yra ne mažesnė už $3 + 2\sqrt{3} > 5 + \sqrt{2}$.

20. Tarkime, kad apskritimai A_1, A_2, A_3, A_4 eina per tašką P, apskritimai A_1, A_2, A_3, A_5 – per tašką Q, o A_1, A_2, A_4, A_5 – per tašką R. Jei P, Q, R yra trys skirtingi taškai, tai apskritimai A_1 ir A_2 turi tris bendrus taškus. Vadinasi, jie sutampa, todėl bendrasis apskritimų A_1, A_3, A_4, A_5 taškas priklauso ir A_2. Kita vertus, jei $P = Q$ arba $P = R$, tai taškas P priklauso visiems penkiems apskritimams, o jei $Q = R$, tai Q priklauso visiems penkiems apskritimams.

Atsakymas: visada.

XVIII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2003 09 27

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS, LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA, NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS, leidyklos ALMA LITTERA, AMŽIUS, TEV, TYTO ALBA.

Vertinimo komisija: G. Alkauskas, A. Ambrazevičius, R. Banys, A. Bastys, A. Birštunas, V. Dičiūnas, R. Didžiapetris, A. Domarkas, P. Drungilas, A. Dubickas (vertinimo komisijos pirmininkas), R. Grigutis, M. Juodis, R. Kašuba (organizacinės komisijos pirmininkas), A. Kaučikas, V. Kazakevičius, K. Liubinskas, V. Mackevičius, A. Mačiulis, J. Mačys, H. Markšaitis, E. Mazėtis, R. Morkvėnas, A. Novikas, T. Plankis, A. Plikusas, A. Posochovas, Š. Repšys, J. Šiaulys, V. Vitkauskas, R. Zovė, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta – **Minsko komandai.**

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
VU MIF	4	8	5	5	7	7	7	5	5	5	5	8	0	5	5	5	5	0	7	7	105	-
Minskas	6	0	5	5	0	0	0	5	5	5	5	2	2	5	5	5	5	8	0	7	75	1
Vilniaus lic. I	4	0	5	5	7	0	0	5	5	1	4	1	4	2	5	0	0	0	7	0	55	2-3
KTU gimn. I	0	0	4	5	4	0	0	1	5	5	5	0	5	5	5	5	5	0	0	1	55	2-3
Šiauliai	1	2	5	5	0	7	0	5	0	5	5	1	0	5	1	5	4	1	1	0	53	4
VU FizChem	4	1	0	5	0	1	0	4	5	1	3	0	0	0	5	5	5	0	0	0	39	-
Kretinga	0	0	5	0	0	0	7	5	5	0	4	0	0	5	0	5	0	0	0	0	36	5
Kauno ,,Saulė"	3	0	0	5	0	0	0	1	0	0	3	0	5	5	0	5	1	0	0	0	28	6
Visagino I	1	0	3	5	0	0	0	1	1	0	0	1	5	0	0	5	5	0	0	0	27	7-8
Vilnius	4	0	0	0	0	3	0	0	0	0	5	0	5	0	0	5	5	0	0	0	27	7-8
Panevėžys	6	1	0	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	0	0	19	9
Vilniaus lic. II	0	0	0	0	0	1	0	0	5	1	0	2	0	0	0	5	0	0	1	0	15	10
Visagino II	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	5	0	0	0	14	11
Pasvalys	4	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	1	0	0	0	5	0	0	0	0	13	12-13
Prienai	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	1	3	0	0	0	0	0	0	0	13	12-13
Tauragė	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	1	0	12	14
KTU gimn. II	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	0	0	0	0	0	0	2	0	8	15
Klaipėda	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	5	0	0	0	0	7	16

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto pirmakursių komanda bei Fizikos ir Chemijos fakultetų pirmakursių jungtinė komanda dalyvavo be konkurso.

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį

$$2^{1/2-2|x|} = |x+1/2| + |x-1/2|.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1/3, \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3. \end{cases}$$

3. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys n^4+4^n yra pirminis skaičius.

4. Įrodykite, kad

$$x_1+x_2+\ldots+x_n - x_1x_2\ldots x_n \leqslant n-1,$$

kai $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 1$.

5. Įrodykite, kad

$$\frac{x_1}{1-x_1} + \frac{x_2}{1-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{1-x_n} \geqslant \frac{n}{n-1},$$

kai $n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$ ir $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$.

6. Įrodykite, kad

$$(1+1/2)(1+1/4)\ldots(1+1/2^n) < 3,$$

kai n – natūralusis skaičius.

7. Įrodykite, kad

$$3(x^4+y^4+z^4)+48 \geqslant 8(x^2y+y^2z+z^2x),$$

kai x, y, z – realieji skaičiai.

8. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ dalijasi iš 899 be liekanos.

9. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad $2003^n - 1$ dalijasi iš n be liekanos.

10. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis $80^n - 1$ dalijasi iš $8^n - 1$ be liekanos.

11. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių šešetus $(a_1, \ldots, a_6)$, kad $a_6 = 144$ ir

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n),$$

kai $n = 1, 2, 3$.

12. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus, kad bet kurių dviejų iš jų sandaugą dalijant iš trečiojo skaičiaus gaunama liekana yra lygi 1.

13. Ar egzistuoja dešimtojo laipsnio daugianaris $p(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_1x + a_0$ su natūraliaisiais koeficientais $a_0, a_1, \ldots, a_9$, turintis 10 realiųjų šaknų ir tenkinantis sąlygą $p(2003) < 10^{33}$?

14. Ar egzistuoja funkcija $f(x)$, apibrėžta su kiekvienu realiuoju x ir tenkinanti sąlygas

$$f(-x^3) \geqslant f(x^2)^2 + 1/4$$

kiekvienam realiajam x bei $f(y) \neq f(z)$ kiekvienai realiųjų skaičių porai (y, z), $y \neq z$?

15. Ar egzistuoja funkcija $f(x)$, apibrėžta su kiekvienu realiuoju x ir tenkinanti sąlygas $f(f(f(x))) = x$ bei $f(0) = 2003$?

16. Aplink apskritimą yra surašyti 2003 skaičiai, kiekvienas iš kurių yra lygus arba 1 arba 0. Pradžioje ne visi skaičiai yra vienodi. Su jais atliekama tokia operacija: tarp dviejų skirtingų greta esančių skaičių įrašomas 1, o tarp dviejų vienodų greta esančių – 0, tada pradiniai skaičiai nutrinami, ir vėl lieka 2003 skaičiai. Ar galima po kelių tokių operacijų gauti visus nulius?

17. Lygiagretainio kraštinės yra lygios a ir b, o įstrižainės c ir d. Raskite jo kampus, jei $a^4 + b^4 = (cd)^2$.

18. Vienetiniame apskritime yra pažymėta n taškų ($n \geqslant 2$), kurie sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad yra ne daugiau kaip $n^2/3$ atkarpų, ilgesnių už $\sqrt{2}$.

19. Duota n $(n \geqslant 2)$ taškų, iš kurių jokie trys nepriklauso vienai tiesei. Kiek mažiausiai reikia spalvų norint nuspalvinti visas taškus jungiančias atkarpas taip, kad jokios dvi atkarpos, turinčios bendrą viršūnę, nebūtų nuspalvintos viena spalva?

20. Taškas P yra trikampio ABC viduje ir tenkina sąlygas

$$\widehat{PBA} = \widehat{PCA} = \frac{1}{3}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}).$$

Įrodykite, kad

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}.$$

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Jei $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$, tai $|x+1/2|+|x-1/2| = 1$, todėl $2^{1/2-2|x|} = 1$. Iš lygties $1/2 = 2|x|$ gauname, kad $x = \pm 1/4$. Kai $x < -1/2$, tai dešinioji lygties pusė yra lygi $-2x$, o kai $x > 1/2$, tai ji yra lygi $2x$. Taigi abiem atvejais ji lygi $2|x|$. Tačiau, kai $|x| > 1/2$, tai $2|x| > 1$, o $2^{1/2-2|x|} < 2^{-1/2} < 1$, todėl daugiau sprendinių lygtis neturi.

Atsakymas: $x = \pm 1/4$.

2. Iš antrosios lygties matome, kad $xyz(x+y+z) \geqslant 0$. Be to,

$$3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0.$$

Iš pirmosios lygties dabar gauname, kad $(x+y+z)^2 \leqslant 1$. Kadangi

$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x+y+z)$$
$$= (xy-yz)^2 + (yz-zx)^2 + (zx-xy)^2 \geqslant 0,$$

tai

$$xyz(x+y+z) \leqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Padauginę iš $(x+y+z)^2 \leqslant 1$, gausime

$$xyz(x+y+z)^3 \leqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Kadangi pastaroji nelygybė yra lygybė, tai galimi tik du atvejai. Arba $(x+y+z)^2 = 1$ ir $xyz(x+y+z) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$, arba $xyz(x+y+z) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 0$. Pirmuoju atveju, turime $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$, todėl $x=y=z=1/3$ arba $x=y=z=-1/3$. Antruoju atveju, bent du iš skaičių x, y, z turi būti lygūs nuliui. Aišku, kad tada trečiasis turi būti lygus $1/\sqrt{3}$ arba $-1/\sqrt{3}$. Visi aštuoni sprendiniai tenkina lygčių sistemą.

Atsakymas: $(x,y,z) = (1/3, 1/3, 1/3), (-1/3, -1/3, -1/3),$
$(\pm 1/\sqrt{3}, 0, 0), (0, \pm 1/\sqrt{3}, 0), (0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$.

3. Akivaizdu, kad $n = 1$ tenkina uždavinio sąlygą. Kai n yra lyginis skaičius, tai $n^4 + 4^n$ yra lyginis ir didesnis už 2, todėl sudėtinis. Kai $n > 1$ yra nelyginis, t.y. $n = 2k+1$, tai $n^4 + 4^n = (2k+1)^4 + 4 \cdot 2^{4k}$. Remdamiesi tapatybe $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$ su $a = 2k+1$ ir $b = 2^k$, gauname, kad $n^4 + 4^n$ taip pat yra sudėtinis skaičius. Vadinasi, daugiau n reikšmių, tenkinančių uždavinio sąlygą, nėra.

Atsakymas: $n = 1$.

4. Aišku, kad $(1+y_1)\ldots(1+y_n) \geqslant 1 + y_1 + \ldots + y_n$, kai $y_1, \ldots y_n \geqslant 0$. Įrašę $y_i = x_i - 1$ su kiekvienu $i = 1, \ldots, n$, gauname, kad $x_1 \ldots x_n \geqslant x_1 + \ldots + x_n - n + 1$.

5. Pažymėkime $y_i = 1 - x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Kadangi $x_i/y_i = 1/y_i - 1$, tai $\sum_{i=1}^n x_i/y_i = \sum_{i=1}^n 1/y_i - n$. Du kartus pritaikę nelygybę apie aritmetinį ir geometrinį vidurkį, gauname

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \geqslant \frac{n}{(y_1 \ldots y_n)^{1/n}} \geqslant \frac{n^2}{y_1 + \ldots + y_n} = \frac{n^2}{n-1}.$$

Taigi $\sum_{i=1}^n x_i/(1-x_i) = \sum_{i=1}^n x_i/y_i \geqslant n^2/(n-1) - n = n/(n-1)$.

6. *1 būdas.* Akivaizdu, kad nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $(1 + 1/4)\ldots(1+1/2^n) < 2$. Kadangi $1 + x < 1/(1-x)$, $0 < x < 1$, tai pakanka įrodyti, kad $(1-1/4)\ldots(1-1/2^n) > 1/2$. Pritaikydami nelygybę $(1-x)(1-y) > 1 - x - y$, kai $x, y > 0$, $n-2$ kartus gausime, kad $(1-1/4)\ldots(1-1/2^n) > 1 - 1/4 - \ldots - 1/2^n > 1/2$.

2 būdas. Kadangi $1+x<\mathrm{e}^x$ su kiekvienu teigiamu realiuoju x bei $1/2+1/4+\ldots+1/2^n=1-1/2^n<1$, tai kairioji nelygybės pusė neviršija $\mathrm{e}<3$.

7. Pagal aritmetinio geometrinio vidurkių nelygybę $x^4+x^4+y^4+16\geqslant 8x^2y$. Analogiškai, $y^4+y^4+z^4+16\geqslant 8y^2z$ ir $z^4+z^4+x^4+16\geqslant 8z^2x$. Sudėję visas tris nelygybes gausime reikiamą nelygybę.

8. Pastebėkime, kad $899=30^2-1=29\cdot 31$. Pažymėkime $N=36^n+24^n-7^n-5^n$. Akivaizdu, kad $N=(31+5)^n-5^n+(31-7)^n-7^n$ dalijasi iš 31 tada ir tik tada, kai $(-7)^n-7^n$ dalijasi iš 31. Taigi n lyginis. Bet su lyginiais n skaičius $N=(29+7)^n-7^n+(29-5)^n-5^n$ dalijasi ir iš 29.

Atsakymas: n bet koks lyginis natūralusis skaičius.

9. *1 būdas.* Nagrinėkime seką $a_1=1,\ a_{k+1}=2003^{a_k}-1$, kai $k=1,2,\ldots$. Akivaizdu, kad $a_1|a_2$. Tarkime, kad $a_{k-1}|a_k$. Tada $a_k=a_{k-1}q$ su natūraliuoju q. Todėl $a_{k+1}=2003^{a_k}-1=2003^{a_{k-1}q}-1$ dalijasi iš $2003^{a_{k-1}}-1=a_k$. Taigi $a_k|a_{k+1}$ su kiekvienu natūraliuoju k, seka a_k didėja, todėl kiekvienas n, priklausantis aibei $\{a_1,a_2,\ldots\}$, tenkina uždavinio sąlygą.

2 būdas. Remiantis indukcija, įrodysime, kad galime paimti, pavyzdžiui, $n=2^k$ su bet kokiu natūraliuoju k. Kai $k=1$, teiginys akivaizdus. Pastebėkime, kad

$$2003^{2^{k+1}}-1=(2003^{2^k}-1)(2003^{2^k}+1).$$

Pirmasis daugiklis, pagal indukcijos prielaidą, dalijasi iš 2^k. Akivaizdu, kad antrasis daugiklis yra lyginis. Vadinasi, $2003^{2^{k+1}}-1$ dalijasi iš 2^{k+1}.

10. Tarkime, kad yra toks n, kad 80^n-1 dalijasi iš 8^n-1. Tada ir $(80^n-1)-(8^n-1)=8^n(10^n-1)$ dalijasi iš 8^n-1. Vadinasi, 10^n-1 dalijasi iš 8^n-1. Analogiškai, $(10^n-1)-(8^n-1)=2^n(5^n-4^n)$ dalijasi iš 8^n-1. Vadinasi, 5^n-4^n dalijasi iš 8^n-1. Tačiau pirmasis skaičius yra mažesnis, prieštara.

Atsakymas: $\emptyset$.

11. Pažymėkime $a_1 + a_2 = x$, $a_3 = y$, $a_2 + a_3 = z$. Tada $a_1 = x + y - z$ ir $a_2 = z - y$. Vadinasi, $a_4 = xy$, $a_5 = xyz$, $a_6 = xyz(xy + y) = x(x+1)y^2z = 144$. Yra tik keturios x reikšmės, su kuriomis $x(x+1)$ dalija $144 = 2^4 \cdot 3^2$, tai $x = 1, 2, 3, 8$. Pirmoji reikšmė $x = 1$ prieštarauja lygybei $a_1 + a_2 = x$. Antruoju atveju, $x = 2$, gauname $a_1 = a_2 = 1$, $z - y = 1$, $y^2z = 24$. Tačiau lygtis $y^2(y+1) = 24$ natūraliųjų sprendinių neturi. Kai $x = 3$, gauname $y^2z = y^2(y+a_2) = 12$. Kadangi $a_2 < x = 3$, tai vienintelė pora, tenkinanti lygtį yra $y = 2$, $a_2 = 1$. Taigi $a_1 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 2 \cdot (2+1) = 6$, $a_5 = 6 \cdot (2+1) = 18$ ir $a_6 = 18 \cdot (6+2) = 144$ tinka, todėl $(2, 1, 2, 6, 18, 144)$ yra vienas ieškomasis šešetas. Kai $x = 8$, iš lygties $y^2z = 2$ iš karto matome, kad $y = 1$, $z = 2$. Iš čia išplaukia, kad $(7, 1, 1, 8, 16, 144)$ yra antrasis šešetas.

Atsakymas: $(2, 1, 2, 6, 18, 144)$ ir $(7, 1, 1, 8, 16, 144)$.

12. Tegul tie skaičiai yra a, b ir c. Aišku, kad jei yra $d > 1$, toks kad $d|a$ ir $d|b$, tai $ac - 1$ nesidalija iš b, prieštara. Taigi skaičiai a, b, c poromis yra tarpusavyje pirminiai. Iš uždavinio sąlygos tada gauname, kad $ab+bc+ca-1$ dalijasi iš abc, todėl $k = 1/a+1/b+1/c - 1/abc$ yra natūralusis skaičius. Laikykime, kad $a \geqslant b \geqslant c$. Lygybė $b = c$ yra galima tik kai $b = c = 1$. Aišku, kad tada netinka joks a, nes ab dalijasi iš c. Kai $b > c$, tai ir $a > b$. Jei $c \geqslant 3$, tai $0 < k < 1$, prieštara. Vadinasi, $c = 2$ ir $k = 1$, taigi $1/2 = 1/a + 1/b - 1/2ab$. Gauname, kad $(a-2)(b-2) = 3$, todėl $a = 5$, $b = 3$. Trejetas $(5, 3, 2)$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $5, 3, 2$.

13. Kadangi visi daugianario koeficientai yra teigiami, tai

$$p(2003) > 2003^{10} > 2^{10}1000^{10} > 10^3 10^{30} = 10^{33}.$$

Atsakymas: neegzistuoja.

14. Įrašę $x = 0$, gauname $f(0) \geqslant f(0)^2 + 1/4$. Taigi $(f(0) - 1/2)^2 \leqslant 0$ ir vienintelė galimybė yra $f(0) = 1/2$. Įrašę $x = -1$, lygiai taip pat gausime, kad $f(1) = 1/2$. Taigi $f(0) = f(1)$, prieštara.

Atsakymas: neegzistuoja.

15. Tegul $f(x) = x$ su visais realiaisiais x, išskyrus $x = 0, 1, 2003$, ir $f(0) = 2003$, $f(1) = 0$, $f(2003) = 1$. Tada $f(x)$ tenkina uždavinio sąlygas.

Atsakymas: egzistuoja.

16. Tarkime, kad po n operacijų pirmą kartą gavome visus nulius. Tada prieš tai buvo visi vienetai. Vadinasi, dar prieš tai visi gretimi skaičiai buvo skirtingi. Tačiau taip būti negali, nes 2003 - nelyginis skaičius.

Atsakymas: ne.

17. Užrašę vieną įstrižainę kaip dviejų vektorių, sudarančių lygiagretainį, suma, o kitą kaip jų skirtumas ir abi lygybes sudauginę, gausime lygybę $cd \cos\gamma = a^2 - b^2$. (Čia γ yra kampas tarp lygiagretainio įstrižainių.) Lygiagretainio plotą pažymėkime S. Tada

$$2S = cd \sin\gamma = cd\sqrt{1 - (a^2 - b^2)^2/(cd)^2} = \sqrt{(cd)^2 - (a^2 - b^2)^2}$$
$$= \sqrt{a^4 + b^4 - (a^2 - b^2)^2} = \sqrt{2}ab.$$

Kita vertus, $S = ab \sin\alpha$, kur α yra lygiagretainio kampas. Taigi $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$, iš kur išplaukia, kad lygiagretainio kampai yra lygūs 45^0 ir 135^0.

Atsakymas: 45^0 ir 135^0.

18. Tegul $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą kvadratas, kurio jokia viršūnė nėra tarp pažymėtųjų taškų. Tarkim lankuose, besiremiančiuose į AB, BC, CD ir DA yra, atitinkamai, a, b, c ir d pažymėtųjų taškų. Nagrinėkime visus keturkampius, kurių viršūnės priklauso šioms keturioms skirtingoms aibėms. Jų yra $abcd$. Kiekvieno iš jų bent viena kraštinė yra ne ilgesnė kaip $\sqrt{2}$. Visas atkarpas, kurių ilgiai neviršija $\sqrt{2}$, vadinsime trumpomis. Kiekviena trumpa atkarpa, jungianti, pavyzdžiui, lanko AB ir lanko BC taškus, yra įskaičiuota cd kartų. Vadinasi, tarp nagrinėjamų keturkampių karštinių iš viso yra ne mažiau kaip $abcd/m$ trumpų atkarpų, kur m yra didžiausias iš skaičių ab, bc, cd, da. Galime laikyti, kad $m = ab$. Visos atkarpos, jungiančios vienam lankui priklausančius taškus taip pat yra trumpos. Vadinasi, iš viso yra ne mažiau kaip

$$cd + a(a-1)/2 + b(b-1)/2 + c(c-1)/2 + d(d-1)/2$$

trumpų atkarpų. Kadangi $n = a+b+c+d$, tai ilgų atkarpų skaičius neviršija

$$s = \frac{1}{2}(n(n-1) - a(a-1) - b(b-1) - c(c-1) - d(d-1) - 2cd)$$
$$= \frac{1}{2}(n^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - 2cd).$$

Gauname, kad

$$n^2 - 3s = -\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 + \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) + 3cd$$
$$= \left(\frac{a+b}{2} - (c+d)\right)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Taigi $s \leqslant n^2/3$, ką ir reikėjo įrodyti.

19. Aišku, kad viena spalva galima nuspalvinti daugiausiai $[n/2]$ atkarpų. Iš viso jų yra $n(n-1)/2$, taigi prireiks ne mažiau kaip $n(n-1)/2[n/2]$ spalvų. Šis skaičius yra lygus n, kai n yra nelyginis, ir $n-1$, kai n lyginis. Įrodysime, kad tiek spalvų pakanka. Iš tiesų, kai n yra nelyginis, neprarasdami bendrumo, galime laikyti, kad visi tie n taškų yra taisyklingojo $n-$ kampio viršūnėse. Tada spalviname visas lygiagrečias atkarpas viena spalva. Prireiks n spalvų. Tarkime, kad n yra lyginis. Kai $n = 2$, teiginys akivaizdus. Kai $n \geqslant 4$ išdėstykime $n-1$ tašką taisyklingojo daugiakampio viršūnėse, o $n-$ tąjį tašką jo centre. Nuspalvinkime daugiakampį aukščiau aprašytu būdu. Tam prireiks $n-1$ spalvos. Belieka sujungti apskritimo centre esantį tašką su bet kokia viršūne ir gautą atkarpą nuspalvinti tokia pat spalva, kuri yra panaudota, spalvinant visas jai statmenas atkarpas.

Atsakymas: n, kai n nelyginis; $n-1$, kai n lyginis.

20. Tegul K yra BP ir AC susikirtimo taškas, o L yra CP ir AB susikirtimo taškas.

6 pav.

Tada

$$\widehat{KPC} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{ABC} - \widehat{PBA} + \widehat{ACB} - \widehat{PCA}$$

$$= \widehat{ABC} + \widehat{ACB} - \frac{2}{3}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \frac{1}{3}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \widehat{PCA}.$$

Taigi $KP = KC$. Analogiškai, $LP = LB$. Kadangi trikampiai ABK ir ACL yra panašūs, gauname, kad

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK + KB}{AL + LC} = \frac{AC - KC + KP + PB}{AB - LB + LP + PC} = \frac{AC + PB}{AB + PC},$$

ką ir reikėjo įrodyti.