VI LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA

Vilnius.1991.10.16

VI Lietuvos komandinę jaunųjų matematikų olimpiadą, įvykusią 1991 m. spalio 26 d. Vilniuje. organizavo Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas. Olimpiadoje dalyvavo 28 komandos.

Absoliučiai geriausią rezultatą pasiekė be konkurencijos dalyvavusi Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto I kurso studentų komanda - 64 tšk.

Pirmąją vietą laimėjo Šiaulių miesto komanda - 48 taškai. Komanda (Boris Burštein, Giedrius Kasparas, Darius Krasauskas, Dalia Nemeikšytė, Mindaugas Pelanis) apdovanota akad. J.Kubiliaus pereinamąja taure "Geriausiai Lietuvos jaunųjų matematikų komandai" ir korporacijos "Lietuvos spektras" dovanomis.

Antrąją vietą laimėjo Kauno "Saulės" vid. mokyklos komanda - 47 taškai. Komanda (Vidmantas Staškūnas, Eduardas Keleras, Karolis Pocius, Algirdas Raščius, Ričardas Svarplys) apdovanota korporacijos "Lietuvos spektras" dovanomis.

Trečiąją vietą laimėjo Kauno miesto komanda - 46 taškai. Komanda (Eimantas Valevičius, Julius Kondrotas, Valdas Ambraziūnas, Paulius Bierontas, Algirdas Sabūnas) apdovanota korporacijos "Lietuvos spektras" dovanomis.

Lietuvos Respublikos Kultūros ir Švietimo ministerija apdovanojo Šiaulių, Kauno "Saulės" ir Kauno miesto komandų vadovus - mokytojus Oną Gražienę, Eugeniją Sadzevičienę, Dalią Kovalskaitę, matematine metodine literatūra.

Šiaulių miesto ir Kauno "Saulės" mokyklos komandos atstovaus Lietuvos Respubliką antrojoje Baltijos šalių komandinėje jaunųjų matematikų olimpiadoje Tartu mieste.

VI LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖS OLIMPIADOS

R E Z U L T A T A I

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ
B.k.	VU MaF I k.	5	5	5	5	2	-	5	5	5	5	-	5	2	5	-	5	-	-	0	5	64
1.	Šiauliai	5	5	1	4	1	0	5	0	3	5	-	5	5	4	2	0	1	0	0	2	48
2.	Kaunas "Saulė"	5	2	5	5	1	1	5	0	0	5	5	5	5	0	0	0	2	0	0	1	47
3.	Kaunas	5	5	5	5	5	1	5	5	-	5	0	-	2	-	2	0	1	0	0	0	46
4.	Vilnius II	2	1	1	5	1	0	5	5	-	5	-	5	-	4	2	0	0	-	-	1	37
5.	Vilnius I	3	1	0	4	1	1	5	5	-	5	0	5	2	-	0	0	1	-	-	2	35
6.	Klaipėda	2	-	0	5	-	-	-	5	5	5	-	5	2	-	2	0	-	-	0	3	34
7-8.	Panevėžys	-	-	0	5	1	2	5	-	-	5	-	-	-	2	2	0	1	-	-	0	23
	Tauragė	2	-	1	5	-	-	5	-	-	5	-	-	2	-	-	0	1	-	-	2	23
9.	Palanga	2	-	1	5	-	-	5	-	-	-	-	5	1	-	-	-	-	-	-	-	19
10.	Ukmergė	1	-	0	5	0	-	0	-	0	5	-	3	2	-	2	-	-	-	-	0	18
11.	Mažeikiai	2	1	0	5	-	2	-	2	-	3	-	-	2	0	-	-	-	-	0	-	17
12.	Kelmė	2	1	0	-	1	-	-	5	-	5	-	-	2	-	0	-	-	-	-	0	16
13-15.	Jonava	-	-	0	-	-	-	-	-	-	4	5	-	2	-	2	-	0	0	-	1	14
	Marijampolė	2	-	1	5	0	1	4	-	0	0	-	-	1	0	0	0	0	0	-	-	14
	Utena I	2	-	-	-	-	0	-	-	-	3	-	-	2	-	0	5	-	0	-	2	14
16-20.	Anykščiai	-	-	-	-	-	2	-	-	-	4	5	-	-	-	-	0	2	-	-	-	13
	Šilalė	2	-	-	5	1	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	0	-	-	0	13
	Raseiniai	1	-	1	-	0	1	-	-	0	5	-	-	2	0	2	0	-	-	0	1	13
	Trakai	-	-	-	5	1	-	-	-	0	4	0	-	-	2	0	0	0	0	0	1	13
	Šilutė	2	-	0	5	1	-	-	-	-	3	-	-	-	-	0	-	-	-	-	2	13
21.	Klaipėdos r.	1	-	0	5	-	-	5	-	0	0	-	0	0	-	-	-	-	0	-	-	11
22.	Kupiškis	2	-	-	5	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
23-25.	Kaišiadorys	-	-	-	-	1	-	-	-	-	5	-	-	2	-	-	-	1	-	-	-	9
	Kauno r.	2	-	-	-	-	-	-	-	0	5	-	-	2	0	-	-	-	-	0	0	9
	Prienai	-	1	-	-	0	1	0	0	-	5	-	-	-	-	2	0	-	-	0	0	9
26.	Vilkaviškis	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	0	0	-	-	-	5
27.	Utena II	1	-	0	-	1	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2

NURODYMAI

6.1. Pažymėkite šiuos skaičius x ir y. Pasinaudokite lygybe $y - 8x = 9$.

6.2. Kai x, y, z yra natūralieji skaičiai, pasinaudodami lygybe $5^y + 7^z = (6 - 1)^y + (6 + 1)^z$ ir Niutono binomu, tirkite dalumą iš 3. Nepamirškite sprendinio (0; 0; 0) ir atvejų, kai ne visi iš x, y, z yra natūralieji skaičiai.

6.3. Kai $p>3$ – pirminis skaičius, tai $2^p + p^2 = 2^p + 1 + (p - 1)(p + 1)$ dalosi iš trijų. Kodėl?

6.4. Naudokite dalumo iš 11 požymį.

6.5. *a)* pvz. $\boxed{1,}$ $\boxed{2}$ 3. $\boxed{4}$ 5. 6. 7. $\boxed{8}$ 9. 10.
b) pvz. $\boxed{-8}$. −5. $\boxed{-2, \ 1, \ 4}$. 7. 10. 13. $\boxed{16}$.

6.6. Kai $n \le -4$.
kai $n \ge 0$, $(n + 1)^3 < n^3 + 5n^2 + 8n + 5 < (n + 2)^3$. Todėl tais atvejais reiškinys negali būti lygus sveikojo skaičiaus kubui. Lieka patikrinti atvejus $n = -3$; -2; -1.

6.7. Tarkime, surašėme sudėties ar atimties ženklus ir subendravardiklinome reiškinį. Keli iš skaičių skaitiklyje bus lyginiai? Nelyginiai?

6.8. Visus šiuos natūraliuosius skaičius suskirstykime į tokius poaibius P_k, $k = 2n-1$, $n = 1, 2, \ldots, 50$:

$P_1 = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$,

$P_3 = \{3; 6; 12; 24; 48; 96\}$,

$P_5 = \{5; 10; 20; 40; 80\}$,

$P_7 = \{7; 14; 28; 56\}$,

$P_9 = \{9; 18; 36; 72\}$,

....

$P_{49} = \{49; 98\}$,

$P_{51} = \{51\}$,

....

$P_{99} = \{99\}$.

Keli skaičiai iš kiekvieno poaibio P_k gali priklausyti "idealiai" aibei?

6.9. Ar gali tokia tiesė eiti per trikampio viršūnę? Kurias trikampio kraštines gali ji kirsti?

6.10. Sujunkite tašką M su kraštinės CB vidurio tašku. Susidaro trys lygiapločiai trikampiai.

6.11. Pamėginkite įrodyti, kad $\sin \angle ACD = \sin \angle ACB$.

6.12. Naudokite masės centro sąvokos metodą.

6.13. Nagrinėkite pjūvio pėdsaką išklotinėje. Kada ši laužtė bus trumpiausia ?

6.14. Pakelkite abi nelygybes kvadratu ir sudėkite. Ar gali viena iš šių nelygybių būti griežta nelygybe >? Išspręskite lygčių sistemą.

6.15. Tarkime, $x \le y \le z \le 1$. Tada $1+xy \le 1+xz \le 1+yz$ ir $x + y \le 1 + xy$, nes $(1 - x)(1 - y) \ge 0$. Todėl

$$S \le \frac{x + y + z}{1 + xy} \le \frac{x + y + 1}{1 + xy} \le 1 + \frac{1}{1 + xy} \le 2$$

Kai $x = 0$, $y = z = 1$, tai $S = 2$.

6.16. Pažymėkite $u = \sqrt[3]{a - x}$, $v = \sqrt[3]{a + x}$ ir išspręskite lygčių sistemą $u + v = 1$, $u^3 + v^3 = 2a$.

6.17. Kiek mažiausiai atkarpų gali turėti tokia laužtė ? Kelios iš jų bus horizontalios, vertikalios, įstrižos ? Atskirkite atvejus *a)* n – lyginis skaičius; *b)* n – nelyginis skaičius.

6.18. Nagrinėkite atvejus *a)* visi skaičiai a, b, c yra teigiami; *b)* tik vienas iš jų yra neigiamas; *c)* tik du iš jų yra neigiami.

6.19. Jei x yra šios lygties sprendinys, ar gali būti $a + \sqrt{x} > x$? O $a + \sqrt{x} < x$? Vadinasi, užtenka ištirti lygtį $a + \sqrt{x} = x$.

6.20. Nubrėžkite funkcijų $y = x^2$ ir $y = |a - x|$ grafikus. Su kuriomis parametro a reikšmėmis šie grafikai kirsis trijuose skirtinguose taškuose ?

6.1. 9.

6.2. (0, 0, 0).

6.3. $p = 3$.

6.4. Ne.

6.5. a), b) Taip.

6.6. $-1, -2, -3$.

6.7. Ne.

6.8. 67.

6.9. Viena tiesė.

6.10. 1/6.

6.13. 2.

6.14. $\left(\pm t + \frac{(2k+1)\pi}{2}; t\right), t \in R, k \in Z$.

6.15. 2.

6.16. $x = \pm \frac{(a+1)\sqrt{24a-3}}{9}$ $\left(a \geq \frac{1}{8}\right)$.

6.17. $n^2 + 2n + 1$, kai n nelyginis;

$n^2 + 2n + \sqrt{2}$, kai n lyginis.

6.19. $a = -\frac{1}{4}$ arba $a > 0$.

6.20. $a = 0, \ \pm\frac{1}{4}$.