1

VII LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA

Vilnius, 1992 10 17

VII Lietuvos jaunųjų matematikų komandinė olimpiada vyko 1992 metų spalio mėn. 17 d. Vilniuje, Vilniaus Universiteto Matematikos fakultete. Olimpiadoje dalyvavo 10 komandų. Pagal tradiciją VU Matematikos fakulteto pirmakursių komanda dalyvavo olimpiadoje be konkurencijos. Komandoms buvo pasiūlyta per 4 valandas išspręsti 20 matematinių uždavinių. Olimpiados rezultatai (taškais):

VU MaF Ik..........63
1. Kaunas-1..........53
2. Panevėžys.........47
3-4. Vilnius-1.........44
3-4. Šiauliai..........44
5. Kaunas-2..........40
6. Vilnius-2.........27
7. Klaipėda..........16
8. Raseiniai.........14
9. Marijampolė.......12

Prof. dr. Jono Kubiliaus pereinamąjį prizą geriausiai Lietuvos jaunųjų matematikų komandai iškovojo Kauno miesto pirmoji komanda:

Vidmantas Baltakis - "Saulės" vid. m-los 12c kl. mokinys
Tomas Staškūnas - "Saulės" vid. m-los 12c kl. mokinys
Raminta Štuikytė - "Saulės" vid. m-los 11b kl. mokinė
Aleksandras Gutmanas - Kauno Technologijos Universiteto Gimnazijos 12a kl. mokinys
Mindaugas Kavaliauskas - Kauno Technologijos Universiteto Gimnazijos 12a kl. mokinys

Komandą olimpiadai ruošė Kauno "Saulės" vid. m-los mokytojai Zenonas Repčys ir Birutė Vosylienė.

Komanda nugalėtoja - Kauno miesto pirmoji komanda - iškovojo teisę atstovauti Lietuvą III Baltijos šalių jaunųjų matematikų komandinėje olimpiadoje, kuri vyks š.m. lapkričio mėn.5-9 dienomis Vilniuje.

Po šio trumpo ir "sauso" išrašo iš olimpiados vertinimo komisijos protokolo ir prieš pateikiant uždavinius - keletas komentarų:

- praeitųjų metų 6-ojoje olimpiadoje dalyvavo visi norintys, į šią - 7-ąją - komandos buvo kviečiamos. Tai atsitiko pirmiausiai dėl to , kad labai sunku per trumpą laiką ištaisyti ir įvertinti 20-30 komandų darbus. O ir praeitųjų metų trečiojo dešimtuko komandų rezultatai buvo labai prasti - jos išsprendė po 1-2 uždavinius (tada dalyvavo 27 komandos).

Kriterijus, kuriuo vadovautąsi kviečiant komandas, buvo toks: bent vienas to miesto (rajono, mokyklos) mokinys turėjo būti laimėjęs prizinę vietą ar apdovanotas pagyrimo raštu 41-ojoje Lietuvos Jaunųjų Matematikų Olimpiadoje. Šiuo kriterijumi numatome vadovautis ir ateityje.

-7-oji komandinė olimpiada buvo kartu ir atrankos į Tarptautinę komandinę olimpiadą "Baltijos kelias 92" etapas. Jau žinojome, kad tos olimpiados dalyvių skaičius bus gerokai didesnis ir įvairesnis nei pernai. Todėl uždavinius Lietuvos komandinei olimpiadai parinkome " tarptautinius " - iš 20 skirtingų šalių nacionalinių olimpiadų, konkursų. Kai kuriuos iš jų teko derinti prie mūsų mokyklinės matematikos programos. Jie atžymėti *. Spręsti kitos šalies olimpiados uždavinį įdomiau nei "bevardį" - taip galima nors neakivaizdžiai palyginti savo jėgas su bendraamžių iš svetur.

O dabar - detalūs VII Lietuvos Jaunųjų Matematikų komandinės olimpiados rezultatai, uždavinai, nurodymai jų sprendimui ir atsakymai.

VII LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖS OLIMPIADOS

R E Z U L T A T A I

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Σ
	VU MaF	-	0	0	5	5	6	5	5	-	-	2	-	3	7	5	5	5	5	-	5	63
1	Kaunas I	2	-	7	5	-	0	-	3	-	-	1	8	5	-	4	2	5	5	2	4	53
2	Panevėžys	-	0	-	5	0	-	5	5	-	-	2	0	5	-	5	5	5	5	-	5	47
3-4	Vilnius I	8	-	-	0	5	-	-	3	0	-	3	0	5	2	1	2	5	5	-	5	44
	Šiauliai	-	-	-	5	2	2	4	5	2	-	0	0	3	7	5	1	2	1	-	5	44
5	Kaunas II	-	0	7	0	5	1	4	5	0	-	0	0	-	-	-	5	3	5	-	5	40
6	Vilnius II	-	0	-	-	5	-	3	5	-	-	2	-	-	-	5	-	-	1	1	5	27
7	Klaipėda	0	0	-	-	-	0	-	1	-	-	0	0	5	-	0	5	-	5	-	-	16
8	Raseiniai	1	-	-	-	-	2	0	5	-	-	0	0	5	-	0	1	-	-	-	0	14
9	Marijampolė	-	-	-	0	-	2	-	3	0	-	0	0	5	-	0	-	1	-	1	-	12

NURODYMAI IR ATSAKYMAI

1. Galime laikyti, kad lygiakraščio trikampio kraštinės lygios 1. Pažymėkime CD=x . $0 \le x \le 1$. Tada

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CE}{AD}\cdot\frac{AD}{CD} = \frac{CB}{BD}\cdot\frac{AD}{CD} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{AD}{x}.$$

Bet atkarpa AD nėra trumpesnė už lygiakraščio trikampio ABC aukštinę, t.y. $\sqrt{3}/2$. Lieka tik prisiminti, kad $x(1-x) \le 1/4$, kai $0 \le x \le 1$.

2. Jei visi taškai yra nutolę nuo koordinačių pradžios taško mažiau kaip $\sqrt{2}$, tai

$$2x_k y_k \le x_k^2 + y_k^2 < 2\ ,\quad k = 1, 2, \dots, n\ .$$

Todėl $x_k y_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Bet tada

$$1 = x_1 x_2 \dots x_n \cdot y_1 y_2 \dots y_n = x_1 y_1 \cdot x_2 y_2 \dots x_n y_n < 1.$$

Gavome prieštarą.

3. Tarkime, kad šios aritmetinės progresijos nariai

$$\alpha+k\ ,\ \alpha+n\ \ \alpha+m,\quad k, n, m \in \mathbb{N}$$

yra trys paeiliui einantys geometrinės progresijos nariai. Tada $(\alpha+n)^2 = (\alpha+k)(\alpha+m)$. Iš šios lygybės ir išplaukia, kad α yra racionalusis skaičius.

4. Raskite pirmuosius sekos narius $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$ ... Pamėginkite įrodyti teiginį $a_n = n(n+1)/2$.

5. Tarkime, tas penkiaženklis skaičius $N = \overline{abcde}$, kur a, b, c, d, e - skirtingi skaitmenys. Pirmiausiai raskime kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus N skirtingų skaitmenų $(A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60)$. Jei šiuos visus triženklius skaičius surašytume stulpeliu ir mėgintume sudėti, tai vienetų vietoje vienodą skaičių kartų turėtume pridėti ir a, ir b, ir visus kitus skaitmenis, t.y. po 12 kartų . Todėl juos visus sudėję gautume: $12(a+b+c+d+e)$. Analogiškai gautume sudėję ir dešimčių, ir šimtų skaitmenis. Skaičius N turi būti lygus visai šiai 60 skaičių sumai, todėl

$$N = 12\,(1+10+100)\cdot(a+b+c+d+e) = 1332\cdot(a+b+c+d+e).$$

Matome, kad skaičius N dalijasi iš 9. Tada ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Bet suma a+b+c+d+e gali būti lygi tik 18 arba 27 (nes $15 = 1+2+3+4+5 \le a+b+c+d+e < 5+6+7+8+9 = 35$). Gauname du skaičius: $N_1 = 1332\cdot 18 = 23\,976$, $N_2 = 35964$. Pirmojo iš jų skaitmenų suma nėra lygi 18.

Atsakymas: 35964

6. Visus kubelius suskirstykime į kelias grupes:
pirmoji grupė - kampiniai kubeliai;
antroji - kubeliai, turintys tik 2 išorines sienas;
trečioji - kubeliai, turintys tik 1 išorinę sieną;
ketvirtoji - vienas centrinis kubelis.
Pamėginkite išsiaiškinti, kelis vienos grupės kubelius daugiausiai gali taisyklingai kirsti viena tiesė.

daugiausiai gali taisyklingai kirsti viena tiese.

Atsakymas: 7.

7. Perrašykime šią lygtį taip:

$$tg7x + ctg7x = \cos 4x + \sin 6x .$$

Kairiosios šios lygties pusės modulis visada nemažesnis už 2, dešiniosios – nedidesnis už 2. Bet kiekviena iš lygčių sistemų

$$tg7x + ctg7x = \cos 4x + \sin 6x = 2 ,$$
$$tg7x + ctg7x = \cos 4x + \sin 6x = -2 .$$

sprendinių neturi (įrodykite!).

Atsakymas: Sprendinių nėra.

8. Akivaizdu, tik vieną sieną galime matyti 6 būdais, dvi – 12 (tiek, kiek yra kubo briaunų), tris – 8 (tiek, kiek yra viršūnių). Keturių sienų nematysime niekada – dvi iš jų būtų lygiagrečios. Skaičių, užrašytų ant sienų, sumos bus skirtingos, jei tie skaičiai bus "labai" skirtingi. Pvz.: 1, 10, 100, 1000, ...

Atsakymas: 26.

9. Nesunku rasti vieną sprendinį (1; 2). Toliau pamėginkite įrodyti, kad jei (x; y) yra šios lygties sprendinys, tai kitą sprendinį galima gauti tokį (y; 5y–x) . Lieka pastebėti, kad tęsdami šį procesą niekada negausime jau buvusio sprendinio, nes antroji sprendinio koordinatė y visada didėja.

10. Pasinaudokite tuo, kad $x^{2n} - y^{2n}$ visada dalijasi iš $x+y$. Todėl jei $x^{2n} + y^{2n}$ dalytųsi iš $x+y$, tai ir

$$2x^{2n} = (x^{2n} - y^{2n}) + (x^{2n} + y^{2n})$$

taip pat dalytųsi iš $x+y$.

11. Akivaizdu, kad jei $a_n = 1$ su kokiu nors $n>2$, tai visi a_{n-1} skaitmenys lygūs 1. Bet sekos narys a_{n-1} buvo gautas kaip a_{n-2} skaitmenų sandauga. Mėginkime įrodyti, kad skaičiaus parašyto vien skaitmenimis 1 negalima išskaidyti į vienaženklių skaičių sandaugą. Pakanka nagrinėti, ar tas skaičius nesidalija iš 3 ir 7 (kodėl?). Bet jei jis dalytųsi iš 3, tai turėtų dalytis ir iš $111 = 3\cdot 37$, o 37 – jau nėra vienaženklis. Liko parodyti, kad nei vienas septyneto natūralusis laipsnis negali būti parašytas tiktai skaitmenimis 1. Bet nesunku įsitikinti, kad du paskutinieji 7^n, $n\in N$ skaitmenys gali būti tiktai 07, 49, 43 arba 01.

12. Deja, skaičiuodami tik kampus, uždavinio neišspręsite. Pamėginkime taikyti sinusų teoremą. Pažymėkime $BC=a$, $\angle CED=\phi$. Tada $CD=a$ ir, iš sinusų teoremos trikampiui ΔBEC , išplaukia $CE = 2a\cos 40^\circ$. Dabar dar kartą panaudoję sinusų teoremą trikampiui ΔDEC , gauname

$$\frac{a}{\sin\phi} = \frac{2a\cos 40^\circ}{\sin(160^\circ-\phi)} .$$

Iš čia galime rasti kampą ϕ.

Atsakymas. 30°.

13. Atsakymas: $4(2\sqrt{3} - 3)/3$.

14. Akivaizdu, kad $n>m$. Lygtį galime pertvarkyti taip:

$$2(m+1)(m+2)\ldots(n-1)n = m!+2 .$$

Dešinioji lygties pusė nesidalija iš 4. Todėl kairėje esanti sandauga negali būti labai "ilga" (jei bus bent du daugikliai $(m+1)(m+2)$, tai vienas iš jų bus lyginis skaičius ir kairioji lygties pusė dalysis iš 4). Gauname $n = m+1$.

Atsakymas: $n=4$, $m=3$.

15. Jei visos trys nelygybės teisingos, tai $a,b,c<1$ ir

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} .$$

Lieka prisiminti, kad $x(1-x) < \frac{1}{4}$, kai $0<x<1$.

16. Vieną tokį trejetą rasti nesunku: 3, 23, 43. Įrodykime, kad daugiau trejetų nebus. Jei pirmasis progresijos narys (pirminis skaičius) $p_1>3$, tai jis gali būti užrašytas pavidalu $3n\pm1$. Bet tada arba antrasis skaičius $p_2 = 3n+21$, arba trečiasis – $p_3 = 3n+39$ nėra pirminiai.

Atsakymas: 3, 23, 43.

17. Pamėginkite rasti

$$ab + bc + ca = 0 ,$$
$$abc = -1 .$$

Dabar jau nesunku išreikšti ir $a^4+ b^4+ c^4$.

Atsakymas: 69.

18. Jei perrašytume šį reiškinį praleisdami visus modulio ženklus, tai, atlikę veiksmus, gautume 0, t.y. lyginį skaičių. Bet tiek $n+m$, tiek $n-m$ (n, m – natūralieji skaičiai) lyginumas yra tas pats.

19. Trikampio, kurio kraštinės lygios a, b, c, plotą galime įvertinti taip:

$$S = \sqrt{p}\,\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{p}{3\sqrt{3}} \le \frac{1}{4\sqrt{3}}\,(a^2+b^2+c^2)$$

(naudojome Herono formulę ir dukart vidurkių nelygybes – geometrinio ir aritmetinio bei aritmetinio ir vidutinio kvadratinio: $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$, $x, y, z > 0$). Lieka taip įvertinti kiekvienos tetraedro sienos (trikampio) plotą ir gautas nelygybes sudėti.

20. Liekana negali būti didesnė už daliklį. Mėginkite paeiliui nagrinėti visus dviženklius skaičius su skaitmenų suma 18, 17, 16, 15, ...

Atsakymas: 15.