

Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia

ALMA LITTERA

AMŽIUS

BALTIC AMADEUS

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS

INFO-TEC

TEV

TYTO ALBA

XIX LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2004 10 02

Uždavinių sąlygos

1. Dvylika skaičių - keturi vienetai, keturi penketai ir keturi šešetai - yra kažkaip surašyti ratu aplink apskritimą. Ar būtinai atsiras toks iš trijų greta stovinčių skaitmenų sudarytas triženklis skaičius (jo skaitmenys gali būti imami prieš arba pagal laikrodžio rodyklę), kuris dalijasi iš 3?

2. Išspręskite lygtį

$$2 \cos(2\pi x) + \cos(3\pi x) = 0.$$

3. Išspręskite lygtį

$$3x^{[x]} = 13.$$

(Čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.)

4. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2 + 5}} + \frac{b}{\sqrt{2a^2 + 5}} \leq \frac{2}{\sqrt{7}},$$

kai $0 \leq a, b \leq 1$.

5. Kokias reikšmes gali įgyti reiškinys

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2},$$

kai a, b, c – realieji nenuliniai skaičiai?

6. Raskite visas realiųjų skaičių poras (x, y) , su kuriomis

$$\begin{cases} x^6 = y^4 + 18, \\ y^6 = x^4 + 18. \end{cases}$$

7. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (m, n, r) , kad

$$2001^m + 4003^n = 2002^r.$$

8. Tegul m ir n yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad jei $mn - 23$ dalijasi iš 24 be liekanos, tai $m^3 + n^3$ dalijasi iš 72 be liekanos.
9. Ar gali su kokia nors realiaja a reikšme skaičiai $(1 - 2a\sqrt{35})/a^2$ ir $a + \sqrt{35}$ abu būti sveikieji?
10. Įrodykite, kad tarp šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių visada atsiras toks skaičius, kuris yra reliatyviai pirminis su kitų penkių skaičių sandauga.
11. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti natūraliųjų skaičių sandauga, jei jų suma yra lygi 2004?
12. Natūralieji skaičiai a, b, c, u, v, w tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} a + u = 21, \\ b + v = 31, \\ c + w = 667. \end{cases}$$

Ar gali būti teisinga lygybė $abc = uvw$?

13. Realusis skaičius u yra lygties $x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$ šaknis, o realusis skaičius v – lygties $x^3 - 3x^2 + 5x + 11 = 0$ šaknis. Raskite $u + v$.
14. Ar galima kvadratinės lentos 100×100 langeliuose surašyti visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 10000 taip, kad kiekviename langelyje esantis skaičius būtų arba mažesnis arba didesnis už visus skaičius, kurie surašyti visuose bendrą kraštinę su tuo langeliu turinčiuose langeliuose?
15. Ar egzistuoja toks daugianaris su sveikaisiais koeficientais $P(x)$, kad su visomis x reikšmėmis intervale $[4/10, 9/10]$ būtų teisinga nelygybė $|P(x) - 2/3| < 10^{-10}$?
16. Ar egzistuoja toks teigiamas skaičius a_0 , kad visi begalinės sekos $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, apibrėžtos rekurentine formule $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), nariai būtų racionali skaičiai?
17. Tegul a, b, c yra trikampio kraštinių ilgi, o x, y, z tokie realieji skaičiai, kad $x + y + z = 0$. Įrodykite, kad

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy \leq 0.$$

18. Taškai M ir N priklauso trikampio ABC kraštinėms, atitinkamai, AB ir BC . Be to,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = 2 \quad \text{ir} \quad \angle ACB = 2\angle MNB.$$

Įrodykite, kad trikampis ABC – lygiašonis.

19. Trapeciją dvi jos įstrižainės dalija į keturis trikampius. Trijų iš jų plotai yra lygūs 1, 2 ir 4. Kokias reikšmes gali įgyti ketvirtojo trikampio plotas?
20. Rombo įstrižainių santykis yra $a : b$. Raskite to rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį.