Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia
ALMA LITTERA
BALTIC AMADEUS
INFO-TEC
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
TEV
TYTO ALBA

XXI LIETUVOS KOMANDINĖ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2006 09 30

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} xyz = 8, \\ x^2y + y^2z + z^2y = 73, \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 98. \end{cases}$$

2. Jei *x*, *y*, *z* yra teigiami realūs skaičiai, tai

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right).$$

3. Su kuriais realiaisiais skaičiais *x*, *y* ir *z* reiškinys

$$E = 2250 + 5(x^2 + y^2 + z^2) + 6(xy + yz + zx) - 4(13x + 15y + 16z)$$

įgyja pačią mažiausią reikšmę? Raskite tą reikšmę.

4. Daugianaris

$$P(x) = x^{2n} + c_1x^{2n-1} + c_2x^{2n-2} + \ldots + c_{2n-1}x + c_{2n}$$

yra kvadratinių polinomų

$$x^2 + a_1x + b_1, \quad x^2 + a_2x + b_2, \ ..., \ x^2 + a_nx + b_n$$

sandauga, o visi koeficientai $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ yra teigiami. Įrodykite, kad yra toks k $(1 \le k \le n)$, kad abu koeficientai a_k ir b_k yra teigiami.

5. Raskite visus sveikuosius skaičius *a*, *b*, *c* ir *d*, kad

$$\begin{cases} ac - 3bd = 5, \\ ad + \ \ bc = 6. \end{cases}?$$

6. Ar sekoje

$$a_n = n^3 - (2n+1)^2$$

yra toks narys, kuris dalijasi iš 2006?

7. Simboliu $s(n)$ žymime sveiko teigiamo skaičiaus *n* skaitmenų sumą. Raskite visus *n* tokius, kad toji visų jo skaitmenų suma $s(n)$ yra ir pats didžiausias skaičiaus *n* daliklis, nesutampantis su *n*.

8. Ar atsiras tokie skaičiai *x*, *y* ir *z* tenkinantys sąlygą $z^2 = (x^2+1)(y^2-1) + n$, jeigu

A. $n = 2006$,
B. $n = 2007$?

9. Aibės $M = \{1, 2, \ldots, 27\}$ poaibis $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 14\}$ pasižymi tokia savybe: kiekvienas aibės *A* elementas yra arba aibės *A* elementas, arba dviejų (galbūt vienodų) poaibio *A* elementų suma. Raskite, kiek mažiausiai elementų gali būti tokiame poaibyje *A*.

10. (A) Raskite tokias dvi teigiamų racionaliųjų skaičių aibes X ir Y, neturinčias bendrų elementų ir kurių junginys yra visų teigiamų racionaliųjų skaičių aibė ir, be to,

$$Y = \{a \cdot b \mid a, b \in X\}.$$

(B) Raskite dvi tokias realiųjų skaičių aibes U ir V, neturinčias bendrų elementų ir kurių junginys yra visų realiųjų skaičių aibė ir, be to,

$$V = \{x + y \mid x, y \in U\}.$$

11. Du žaidėjai A ir B žaidžia tokį žaidimą. Žaidimo pradžioje lentoje yra užrašyta m vienodų sveikų teigiamų skaičių, kiekvienas iš kurių lygus n. Žaidimą pradeda žaidėjas A, po to jie ėjimus daro pakaitomis. Ėjimą darantis žaidėjas pasirenka bet kurį lentoje esantį nenulinį skaičių k. Jeigu tas skaičius k yra pats mažiausias iš lentoje esančiųjų sveikųjų teigiamų skaičių, tai žaidėjas vietoje skaičiaus k įrašo skaičių $k-1$, o jei k nėra pats mažiausias iš lentoje esančių teigiamų skaičių, tai jis skaičiaus vietoje k įrašo patį mažiausią mačiausiu lentoje esantį teigiamą skaičių.

Žaidėjas, po kurio ėjimo visi lentoje parašytieji skaičiai pasidaro lygūs nuliui, laimi žaidimą.

Kuri žaidėjas laimi žaidimą, jeigu abu žaidėjai žaidžia pačiu geriausiu būdu?

12. Į kai kuriuos 8×8 (arba kad ir 6×6) matmenų lentelės langelius padedame po riešutą taip, kad būtų išpildytos tokios 2 sąlygos:

(A) bet kuriame tos lentelės 1×2 arba 2×1 matmenų stačiakampyje rasime padėtą nors vieną riešutą;

(B) Bet kuriame tos lentelės 1×7 arba 7×1 matmenų stačiakampyje rasime padėtus 2 riešutus gretimuose langeliuose.

Kiek mažiausiai riešutų reikėtų padėti tokioje lentelėje?

13. Apie skritulį surašyti 5 skaičiai, absoliutiniu didumu neviršijantys 1 ir kurių visų suma yra 1. Įrodykite, kad galima rasti tris tokius iš eilės einančius skaičius a, b ir c tokius, kad visos sumos

$$a+b,\ b+c \text{ ir } a+b+c$$

yra neneigiamos.

14. Kiekviename kvadratinės 17×17 lentelės langelyje yra padėta po vieną monetą „vytimi aukštyn“. Vienu ėjimu leidžiama apversti bet kurias 5 gretimas vienos kurios nors eilutės, stulpelio arba įstrižainės monetas.

Ar galima atlikus baigtinį ėjimų skaičių padaryti taip, kad visos monetos gulėtų „vytimi žemyn“?

15. Vienuolikai kalbininkų reikėjo išmokti 11 užsienio kalbų (prieš tai nė vienas iš jų jokios iš tų kalbų nemokėjo). Tuo tikslu buvo iškviestas užsienio kalbų konsultantas, kuris per vieną seansą gali išmokyti du kalbininkus dviejų užsienio kalbų (kiekvienas išmoksta abi tas kalbas). Kiek mažiausiai užsiėmimų reikia pravesti, kad visi 11 kalbininkų išmoktų visas 11 jų iki tol nemokėtų kalbų (kalbininkas gali ateiti į užsiėmimą, jeigu jis jau ir moka vieną kurią nors iš tų kalbų).

16. 2006 taškais apskritimą padalijome į 2006 lygias dalis. Baronas Miunhauzenas tvirtina, kad jis gali nubrėžti uždarą laužtę, kurios viršūnėmis būtų visi tie taškai, sudarytą iš 2006 atkarpų ir tokią, kad jokios 2 tos laužtės atkarpos nebūtų lygiagrečios.

Ar baronas kartais neapsirinka?

17. Taškas D yra trikampio ABC vidaus taškas, priklausantis pusiaukraštinei, išvestai per viršūnę A. Žinodami, jog $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$, raskite $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

18. Du skirtingų spindulių apskritimai C_1 ir C_2 su centrais taškuose O_1 ir O_2 susikerta taškuose A ir B. Apskritimo C_1 liestinė, išvesta per tašką A, taške M kertasi su apskritimo B liestine, išvesta per tašką B.

Įrodykite, kad abu apskritimai C_1 ir C_2 iš taško M matomi tokiu pačiu kampu.

Sakoma, kad apskritimas C iš taško M yra matomas kampu α, jeigu α yra lygus iš taško P išvestų apskritimo C liestinių sudaromo kampo didumui.

19. Dviejų vienetinių kvadratų su atitinkamai lygiagrečiomis kraštinėmis bendrosios stačiakampės dalies plotas yra 1/8. Raskite patį didžiausią ir patį mažiausią įmanomą atstumą tarp tų kvadratų centrų.

20. Trapecijos $ABCD$ pagrindai yra BC ir AD. Per trapecijos įstrižainių sankirtos tašką išvedame lygiagrečią pagrindams tiesę kertančią šonines kraštines AB ir CD atitinkamai taškuose M ir N. Atkarpos DP ir AQ yra atitinkamai trikampių DMC ir ABN aukštinės. Įrodykite, kad $AP = DQ$.