

**XXVIII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI**

Konkurso dalyvius sveikina Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentas Alexander SOIFER

**Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2013-09-28**

1. Išspręskite lygtį

$$3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + xy = 19, \\ y + z + yz = 11, \\ z + x + zx = 14. \end{cases}$$

3. Nustatykite, ar gali trys skirtingi realieji skaičiai x, y, z tenkinti lygybę

$$x^3y^4 + y^3z^4 + z^3x^4 = x^4y^3 + y^4z^3 + z^4x^3.$$

4. Realieji skaičiai x, y, z, c tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} x(y+z) = 20, \\ y(z+x) = 13, \\ z(x+y) = c^2. \end{cases}$$

Raskite visas galimas skaičiaus c^2 reikšmes.

5. Įrodykite, kad bet kokie teigiami realieji skaičiai x, y, z tenkina nelygybę

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

6. Sudėjus šešis iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, iš kurių nė vienas nesidalija iš 7, gautas sveikojo skaičiaus kvadratas $S = n^2$.

a) Raskite visus tokius keturženklis skaičius S .

b) Kiek yra tokių šešiaženklis skaičių S ?

7. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių k , kad mažiausias bendras trijų skaičių $6^6, 8^8$ ir k kartotinis lygus 12^{12} ?

8. Duotas natūralusis skaičius n . Kiekvieno iš skaičių n ir $n+1$ skaitmenų suma dalijasi iš 101.

a) Raskite bent vieną tokį skaičių n .

b) Raskite mažiausią tokį skaičių n .

9. Raskite visus skaičiaus $10^{2013} - 1$ natūraliuosius daliklius, neviršijančius a) 9; b) 99.

10. Įrodykite, kad jei sveikieji skaičiai a, b, c tenkina lygybę

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5,$$

tai sandauga abc yra sveikojo skaičiaus kubas.

11. Į visus 100×100 lentos langelius įrašyta po skaičių. Viršutinėje eilutėje iš kairės į dešinę iš eilės įrašyti skaičiai $0, 1, 2, \dots, 99$. Tie patys skaičiai iš eilės įrašyti kairiajame stulpelyje iš viršaus į apačią. Bet kuriuose keturiuose gretimuose langeliuose, sudarančiuose 2×2 kvadratą, įrašytų skaičių suma lygi 20. Koks skaičius įrašytas dešiniajame apatiniame lentos langelyje?

12. Visi 13×13 lentos langeliai nudažyti baltai. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurios 5 gretimus vienos eilutės arba vieno stulpelio langelius ir pakeisti kiekvieno iš jų spalvą: baltus langelius perdažyti juodai, o juodus baltai. Ar įmanoma visus langelius padaryti juodus?

13. a) Ar skaičius $1, 2, \dots, 30$ įmanoma suskirstyti į 10 trejetų (x, y, z) taip, kad bet kurio trejeto skaičių skirtumai $y - x$ ir $z - y$ būtų du skirtingi skaičiai iš aibės $\{9, 10, 11\}$?

b) Ar skaičius $1, 2, \dots, 33$ įmanoma suskirstyti į 11 trejetų (x, y, z) taip, kad bet kurio trejeto skaičių skirtumai $y - x$ ir $z - y$ būtų du skirtingi skaičiai iš aibės $\{10, 11, 12\}$?

(Abiem atvejais visi 30 arba 33 skaičiai turi būti panaudoti.)

14. Ant žemės guli 9 akmenų krūvos (kiekvienoje – bent po vieną akmenį). Bet kuriose dviejose krūvose yra po skirtingą akmenų skaičių, o didžiausioje krūvoje yra n akmenų. Visus bet kurios krūvos akmenis įmanoma sumesti į likusias krūvas taip, kad gautose 8 krūvose būtų po lygiai akmenų. Taip pat bet kurių dviejų krūvų visus akmenis įmanoma sumesti į likusias krūvas taip, kad gautose 7 krūvose būtų po lygiai akmenų. Raskite mažiausią galimą n reikšmę.

15. Kai kurie 2013×2013 lentos langeliai pažymėti. Kiekviename 19×19 kvadrato yra bent 21 pažymėtas langelis. Kiek mažiausiai langelių gali būti pažymėta?

16. Iš trijų atkarpų, lygių trikampio ABC aukštinėms, sudėtas trikampis $A_1B_1C_1$. O iš atkarpų, lygių trikampio $A_1B_1C_1$ aukštinėms, sudėtas trikampis $A_2B_2C_2$. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_2B_2C_2$ panašūs.

17. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O . Trikampių ABC ir ABD perimetrai lygūs. Trikampių ACD ir BCD perimetrai taip pat lygūs. Įrodykite, kad lygūs yra ir trikampių AOD bei BOC perimetrai.

18. Kvadrato $ABCD$ viršūnė A ir kraštinės CD vidurio taškas yra simetriški tiesės l atžvilgiu. Raskite dviejų keturkampių, į kuriuos kvadratą dalija tiesė l , plotų santykį.

19. Taškai A_1 ir B_1 yra smailiojo trikampio ABC aukštinių, atitinkamai išvestų iš viršūnių A ir B , pagrindai. Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas ω ir tiesė A_1B_1 kertasi taškuose A_2 ir B_2 . Apskritimo ω liestinės, išvestos per šiuos du taškus, kertasi taške C_1 . Įrodykite, kad tiesė CC_1 eina per apskritimo ω centrą.

20. Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžto apskritimo ω liestinės, išvestos per taškus B ir C , kertasi taške P . Taškai D ir E yra atitinkamai statmenų, išvestų iš taško P į tieses AB ir AC , pagrindai. Įrodykite, kad trikampio ADE aukštinių sankirtos taškas sutampa su atkarpos BC vidurio tašku.