XXIX Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. 0, $\frac{1}{4}$.

   $\sqrt{1-4x} = 1-2\sqrt{x} \implies 1-4x = 1-4\sqrt{x}+4x \implies \sqrt{x} = 2x \implies x = 0$ arba $1 = 2\sqrt{x} \implies x = \frac{1}{4}$. Abi gautos šaknys tenkina pradinę lygtį.

2. Ats. Sprendinių nėra.

   Sudėkime abi lygtis ir išskirkime pilnuosius kvadratus:
$$(x+y)^2 + (x-1)^2 = 0 \implies x+y = 0, \quad x-1 = 0 \implies$$
$$x = 1, \quad y = -x = -1.$$
   Gautasis sprendinys pradinės sistemos netenkina.

3. Ats. 16, 5, $5 \pm \sqrt{5}$

   $(\frac{8}{x-8} - 1) + (\frac{10}{x-6} - 1) + (\frac{12}{x-4} - 1) + (\frac{14}{x-2} - 1) = 0 \implies \frac{16-x}{x-8} + \frac{16-x}{x-6} + \frac{16-x}{x-4} + \frac{16-x}{x-2} = 0 \implies 16 - x = 0, \quad x = 16$ arba $0 = \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} = (\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-2}) + (\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4}) = \frac{2x-10}{(x-8)(x-2)} + {}$ $+ \frac{2x-10}{(x-6)(x-4)} \implies 2x - 10 = 0, \quad x = 5$ arba $0 = \frac{1}{(x-8)(x-2)} + \frac{1}{(x-6)(x-4)} = {}$ $= \frac{(x-6)(x-4)+(x-8)(x-2)}{(x-6)(x-4)(x-8)(x-2)} \implies 0 = (x-6)(x-4) + (x-8)(x-2) = {}$ $= 2x^2 - 20x + 40 \implies x = 5 \pm \sqrt{5}$. Visos gautos šaknys tenkina pradinę lygtį.

4. Ats. Visos funkcijos $f(x) = c + \frac{c}{x}$, kur $c \in \mathbb{R}$ – bet kokia konstanta.

   Į pradinę lygtį įrašome $x = 1$: $f(y) + f(-y) = f(1) \implies f(-y) = {}$ $= f(1) - f(y), y \in \mathbb{R}^*$.

   Į pradinę lygtį įrašome $y = -1$: $xf(-x) + f(1) = xf(x) \implies xf(x) = {}$ $= f(1) + x(f(1) - f(x)) = f(1) + xf(1) - xf(x) \implies f(x) = c + {}$ $+ \frac{c}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$, kur $c = f(1)/2$.

   Gautosios funkcijos tenkina pradinę lygtį.

5. Kairiąją nelygybės pusę pažymėkime S, o reiškinį

$$\frac{b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{c^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{d^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{a^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3}$$

pažymėkime T.

Kadangi $a^3+a^2b+ab^2+b^3=(a+b)(a^2+b^2)$ ir $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, tai $S-T=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\ldots=(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-a)=0 \implies T=S$.

Mums reikia įrodyti, kad $S+T=\frac{a^4+b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\ldots=2S\geqslant\frac{a+b+c+d}{2}$. Pagal kvadratinio ir aritmetinio vidurkių nelygybę

$$\frac{a^4+b^4}{2}\geqslant\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\implies$$

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\geqslant\frac{a+b}{4}.$$

Užrašę dar tris analogiškas nelygybes (su b ir $c,\ldots$) ir visas keturias sudėję, gauname nelygybę, kurią reikia įrodyti.

6. Ats. 28.

Iš nagrinėjamo keturženklio skaičiaus $\overline{abcd}$ atėmę jo skaitmenų sumą 22, vėl gausime skaičių, dalų iš 11:

$$\overline{abcd}-(a+b+c+d)=999a+99b+9c=11(91a+9b+c)-2(a+c).$$

Taigi $a+c$ dalijasi iš 11 ir $a+c$ yra tarp $1+0=1$ ir $9+9=18$. Tada $a+c=11$ ir $b+d=22-11=11$. Kita vertus, jei $a+c=11$ ir $b+d=11$, tai $a+b+c+d=22$ ir $\overline{abcd}=11(91a+9b+c)-2(a+c)+(a+b+c+d)$ dalijasi iš 11.

Belieka išvardyti galimybes. Kai $a=2$, tai $c=9$, o $b=2,3,4,5,6,7,8$ arba 9 (tada atitinkamai $d=9,8,7,6,5,4,3,2$). Gauname 8 galimybes. Analogiškai turime 8 galimybes, kai $c=2$ ir $a=9$. Kai $b=2$ ir kai $d=2$ (ir $a,c\neq 2$), gauname po 6 galimybes. Iš viso turime 28 skaičius.

7. Ats. $(x,y,z)=(4,6,3)$ arba $(22,0,27)$.

Sudedame lygtis: $(x+z)(y+1)=49$. Atimame lygtis: $(y-1)(x-z)=5$. Taigi $y-1=\pm1$ arba ±5 ir tuo pat metu $y+1$ dalija 49. Tinka tik du atvejai iš keturių. Įrašydami y reikšmes (0 ir 6) į pradinę sistemą, gauname lengvas tiesinių lygčių sistemas. Jas išsprendę ir gauname du sprendinius.

8. Ats. 1.

   $3^{2n+1}-4^{n+1}+6^n = 3\cdot(3^n)^2+3^n\cdot 2^n-4\cdot(2^n)^2 = (3^n-2^n)(3\cdot 3^n+4\cdot 2^n)$. Jei šis skaičius pirminis, tai mažesnysis iš dviejų dauginamųjų 3^n-2^n lygus 1. Jei $n \geqslant 2$, tai $1 = 3^n-2^n > 3\cdot 2^{n-1}-2^n = 2^{n-1} \geqslant 1$ – prieštara. Kai $n=1$, tai skaičius 17 išties pirminis.

9. Tarkime, kad radome 18 neprilygstamų skaičių. Tarp iš eilės einačių natūraliųjų skaičių kas šeštas dalijasi iš 6, todėl tarp 18 skaičių bus lygiai trys, dalūs 6, ir juos galime pažymėti $6n, 6(n+1), 6(n+2)$. Jie jau turi po du pirminius daliklius 2 ir 3, taigi kitų negali turėti. Tik vienas iš skaičių $n, n+1, n+2$ dalijasi iš 3, todėl likę du skaičiai dalijasi tik iš 2 (yra gretimi dvejeto laipsniai). Jų skirtumas yra 1 arba 2, todėl šie du skaičiai yra 1 ir 2 arba 2 ir 4 (toliau skirtumas tarp dvejeto laipsnių tik didėja). Tada $n \leqslant 2$ ir turime tokius skaičius, dalius 6: 6, 12, 18 arba 12, 18, 24. Abiem atvejais sekoje yra pirminis skaičius 13.

10. Ats. $(99!)^{100!}\cdot(100!)^{99!}$.

    Faktorialo $(100!)!$ sandaugoje yra $100! = 100\cdot 99!$ dauginamųjų. Juos iš eilės padalykime į 100 grupių po $99!$ dauginamųjų ir įvertinkime atitinkamas dalines sandaugas:

    $$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 99! < (99!)^{99!},$$

    $$(99!+1)\cdot(99!+2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot 99!) < (2\cdot 99!)^{99!},$$

    ir t. t. Sudauginkime visas 100 nelygybių:

    $$(100!)! < (1\cdot 99!)^{99!}\cdot(2\cdot 99!)^{99!}\cdot\ldots\cdot(100\cdot 99!)^{99!} =$$

    $$= (1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100)^{99!}\cdot((99!)^{99!})^{100} = (99!)^{100!}\cdot(100!)^{99!}.$$

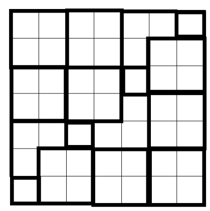
11. Tarkime, kad visus 4 pažymius mokinys gavo bent po 3 kartus. Tada jo pažymių sumoje yra dėmenys 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, kurių suma lygi 42. Yra dar 5 dėmenys, kurių suma yra tarp $2\cdot 5 = 10$ ir $5\cdot 5 = 25$. Taigi visų 17 pažymių suma yra tarp 52 ir 67. Ji turi dalytis iš 17, bet nustatytame intervale joks skaičius nesidalija iš 17 – prieštara.

12. Ats. a) Taip; b) ne.

a) Iš eilės į lentelės eilutes surašome šiuos skaičius: (1, 11, 5, 14, 9); (8, 3, 12, 4, 13); (15, 10, 7, 6, 2).

b) Jei taip surašius skaičius, kiekvienos eilutės skaičių suma būtų s, tai visų skaičių suma būtų lygi $4s = 1 + 2 + \ldots + 20 = 210$. Gavome prieštarą, nes 210 nesidalija iš 4.

13. Paveikslėlyje apibrėžti 4 vienetiniai langeliai, tad likusiose 12 apibrėžtų sričių nudažyti bent $29 - 4 = 25$ langeliai. Kadangi $12 \cdot 2 < 25$, tai pagal Dirichlė principą bent vienoje iš sričių (todėl ir 2×2 kvadrate) yra mažiausiai 3 nudažyti langeliai.



14. Ats. a) Taip; b) ne.

a) Matematikus galima vaizduoti taškais, o pažintis – juos jungiančiomis atkarpomis. 6 taškus reikia sujungti 9 atkarpomis, kad nesusidarytų trikampių. Tai galima padaryti, pažymėjus taškus A, B, C, D, E, F ir juos sujungus atkarpomis $AB, BC, CD, DA, AE, CE, BF, DF, EF$.

b) 6 taškus turi jungti 10 atkarpų.

Jei iš kurio nors taško išeina bent 4 atkarpos (t. y. 4 arba 5), tarkime, taškas A sujungtas su B, C, D, E, tai šių keturių taškų jau negalime jungti tarpusavyje. Iš paskutinio taško F dar galime nubrėžti daugiausiai 4 atkarpas į B, C, D, E. Iš viso gauname daugiausiai $5 + 4 < 10$ atkarpų.

Jei iš visų 6 taškų išeina daugiausiai po 3 atkarpas, tai atkarpų vėl yra ne daugiau nei $3 \cdot 6/2 < 10$.

15. Ats. Kai $n \neq 2014$.

Kai $n \neq 2014$, pirmasis žaidėjas pirmuoju ėjimu gali pastumti šaškę į įstrižainę, einančią per apatinį dešinįjį langelį. Toliau antrojo žaidėjo ėjimu šaškė paliks įstrižainę, ir pirmasis žaidėjas visada galės ją grąžinti į naują, žemesnį šios įstrižainės langelį. Tai bus galima kartoti, kol šaškė neatsidurs pačiame dešiniajame apatiniame langelyje ir antrasis žaidėjas negalės padaryti ėjimo.

Kai $n = 2014$, po pirmojo žaidėjo ėjimo šaškė paliks įstrižainę, ir tą pačią pergalės strategiją galės taikyti jau antrasis žaidėjas.

16. Ats. 22,5.

Pusiaukraštinių sankirtos tašką pažymėkime M. Pagal pusiaukraštinės savybę, $AM = \frac{2}{3}AD = 12$, $BM = \frac{2}{3}BE = 9$, $CF = 3MF$. Stačiojo trikampio ABM apibrėžtinio apskritimo centras yra įžambinės vidurys F, todėl MF ir AF yra apskritimo spinduliai, $MF = AF = \frac{1}{2}AB$. Pagal Pitagoro teoremą, $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 15$. Taigi $MF = 7{,}5$ ir $CF =$22,5.

17. Ats. 72.

Trikampio statinius pažymėkime a, b, o įžambinę c. Užrašykime trikampio plotą trimis būdais: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 3c = \frac{1}{2}\cdot 4a\sin 45^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4b\sin 45^\circ$ (paskutinis reiškinys – dviejų trikampių, į kuriuos statųjį trikampį dalija pusiaukampinė, plotų suma). Taigi

$$ab = 3c = 2\sqrt{2}(a+b), \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Tada $9c^2 = 8(a^2 + 2ab + b^2) = 8(a^2 + b^2) + 16ab = 8c^2 + 48c$, $c^2 = 48c$, $c = 48$, $S = 3c/2 = 72$.

18. Ats. 126°.

$\angle DAC = \angle ACB$ (priešiniai)$= \angle ACD$ (pusiaukampinė) $\Longrightarrow AD = CD$ (lygiašonis trikampis) $= AO \Longrightarrow \angle BOC = \angle AOD$ (kryžminiai) $= \angle ADO$ (lygiašonis $\triangle ADO$) $= \angle OBC$ (priešiniai) $\Longrightarrow CO = CB$ (lygiašonis trikampis) $= OD \Longrightarrow \angle ODC = \angle OCD$ (lygiašonis $\triangle OCD$) $= \angle BCO$.

Kadangi $\angle BDC = \angle BCO$ ir $\angle DBC = \angle CBO$, tai $\triangle BCO \sim \triangle BDC$ ir $\triangle BDC$ lygiašonis:

1) $\angle DBC = \angle BCD = 2\angle BCO = 2\angle BDC \Longrightarrow 180^\circ = \angle DBC + \angle BCD + \angle BDC = 5\angle BDC \Longrightarrow \angle BDC = 36^\circ$ ir $\angle ADB = \angle DBC$ (priešiniai) $= 72^\circ$;

2) $DB = DC = DA \Longrightarrow \triangle ADB$ lygiašonis $\Longrightarrow \angle ABD = (180^\circ - \angle ADB)/2 = 54^\circ \Longrightarrow \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 126^\circ$.

19. $BE = BD$ (apskritimo liestinės) $\implies \angle BED = (180^\circ - \angle ABC)/2 = (\angle ACB + \angle BAC)/2$ ir $\angle OCA = \angle ACB/2, \angle OAC = \angle BAC/2$ (pusiaukampinės) $\implies \angle COF + \angle CEF = (180^\circ - \angle COA) + (180^\circ - \angle BED) = (\angle OCA + \angle OAC) + (180^\circ - (\angle ACB + \angle BAC)/2) = (\angle ACB + \angle BAC)/2 + 180^\circ - (\angle ACB + \angle BAC)/2 = 180^\circ \implies$ keturkampis $COFE$ įbrėžtinis $\implies \angle OFC = \angle OEC = 90^\circ$ (spindulys OE statmenas liestinei). (Tai įrodymas, kai taškas F yra atkarpoje DE; kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.)

20. $\angle AMP = \angle ADP$, todėl taškai A, M, D, P priklauso vienam apskritimui. $\angle ACK = \angle KAP$ (AP liečia Ω įbrėžtojo trikampio ACK viršūnėje) ir $\angle ACK = 180^\circ - \angle SDK = \angle KDP$ (keturkampis $CSDK$ įbrėžtinis). Taigi $\angle KAP = \angle KDP$, todėl taškai A, D, P, K priklauso vienam apskritimui (kartu su M) ir $\angle AKP = \angle ADP = 90^\circ$. Pagaliau $\angle CAP = \angle CBA$ (AP liečia Ω įbrėžtojo trikampio ABC viršūnėje) ir todėl $\angle MKP = 180^\circ - \angle MAP$ (keturkampis $MKPA$ įbrėžtinis) $= 180^\circ - \angle CBA = \angle AKC$ (keturkampis $CBAK$ įbrėžtinis). Taigi $\angle MKC = \angle AKC - \angle MKA = \angle MKP - \angle MKA = \angle AKP = 90^\circ$.