XXX Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. 8.

   Pažymėkime $y = \sqrt[3]{x}$ ir iš eilės panaikinkime kvadratines šaknis:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+y^3}} = y \implies \sqrt{1+y^3} = y^2 - 1 \implies$$
$$y^4 - y^3 - 2y^2 = y^2(y^2 - y - 2) = 0.$$

   Reikšmė $y = 0$ netinka, todėl $y^2 - y - 2 = 0$ ir $y = -1$ arba $y = 2$. Lygtį tenkina tik $y = 2$ ir $x = 8$.

2. Ats. $(x, y) = (0, 0), (1, -1), (6, -2), (1, 3)$.

   Sudėkime lygtis ir išskirkime pilnąjį kvadratą:

$$(x + y)^2 = 4(x + y) \implies x + y = 0 \text{ arba } x + y = 4.$$

   Bet kurią iš išraiškų $y = -x$ ir $y = 4 - x$ įrašę į bet kurią pradinę lygtį, gausime paprastą kvadratinę lygtį. Pvz., kai $y = 4 - x$, tai suprastinta pirmoji lygtis atrodo taip: $x^2 - 7x + 6 = 0$. Gauname $x = 1$ arba $x = 6$ ir atitinkamai $y = 3$ arba $y = -2$. Tiek šie, tiek antruoju atveju gauti sprendiniai tenkina pradinę sistemą.

3. Ats. $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, ir $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

   Imkime lygtyje $x = y = 0$: $f^2(0) = f(0) \implies f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Imkime lygtyje $x = 0$: kiekvienam y galioja $f^2(y) = f(0)$. Jei $f(0) = 0$, tai $f(y) = 0, y \in \mathbb{R}$. Jei $f(0) = 1$, tai kiekvienam atskiram y turime $f(y) = 1$ arba $f(y) = -1$. Pabrėžkime, kad tokių funkcijų yra be galo daug, o ne dvi; pvz., galėtų būti, kad $f(y) = -1$, kai $y < 0$, ir $f(y) = 1$ kitais atvejais.

   Tarkime, kad $f(0) = 1$ ir f bent vieną kartą įgyja reikšmę -1: $f(y_0) = -1$ su kokiu nors y_0. Pradinėje lygtyje imkime $x = -y_0, y = y_0$: $f(0)f(y_0) = f(-y_0 - y_0 \cdot (-1)) = f(0)$ ir $-1 = 1$. Gavome prieštarą. Taigi jei $f(0) = 1$, tai $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

4. Ats. $x + y = 0$.

   Pažymėkime $a = \sqrt{1+x^2}+x$, $b = \sqrt{1+y^2}+y$, tada $ab = 1$ ir $a, b \neq 0$. Panaikinkime šaknį: $(a-x)^2 = 1 + x^2$ ir $x = (a - 1/a)/2$. Analogiškai $y = (b - 1/b)/2$. Taigi

$$x + y = (a + b - (a+b)/ab)/2 = (a + b - (a+b))/2 = 0.$$

   Reikšmė įgyjama, kai, pvz., $x = y = 0$.

5. Pažymėkime $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$. Pertvarkykime kairiąją nelygybę: $3(a^2+b^2+c^2) - ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = (a+b+c)^2 \geqslant (a+b+ + c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$. Taigi pakanka įrodyti nelygybę

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca},$$

   kuri ekvivalenti

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0.$$

   Dešinioji nelygybė ekvivalenti

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) + x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3 \geqslant \\ \geqslant 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

   Kadangi $(x^3y + xy^3) + (y^3z + yz^3) + (z^3x + zx^3) \geqslant 2(x^2y^2 + y^2z^2 + + z^2x^2)$ (kiekvieniems skliaustams pritaikome aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę), tai pakanka įrodyti, kad

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geqslant x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3.$$

   Pastaroji nelygybė ekvivalenti Schur'o nelygybei

$$x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-z)(y-x) + z^2(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

6. Ats. a) 58; b) 116.

   Sandaugoje $120! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 120$ yra 120:2=60 lyginių skaičių, taigi bent 60 dvejetų. Skaičiai, dalūs iš 4, papildomai prideda 120:4=30 dvejetų, dalūs iš 8 – 120:8=15 dvejetų, dalūs iš 16 – dar [120:16]=7 dvejetus ir t. t. Taigi didžiausias dvejeto laipsnis, iš kurio dalijasi 120!, yra 2^x, kur $x = [120/2] + [120/4] + [120/8] + [120/16] + \ldots = 60 + 30 + 15 + 7 + 3 + 1 = = 116$. Analogiškai didžiausias trejeto laipsnis yra 3^y, kur $y = [120/3] + + [120/9] + [120/27] + \ldots = 40 + 13 + 4 + 1 = 58$. Kadangi $12^k = 2^{2k}3^k$, tai ieškoma k reikšmė lygi $\min(x/2, y) = 58$. Analogiškai b) dalyje turime

$x = [240/2]+[240/4]+[240/8]+\ldots = 120+60+30+15+7+3+1 = 236$, $y = [240/3] + [240/9] + [240/27] + \ldots = 80 + 26 + 8 + 2 = 116$ ir $k = \min(x/2, y) = 116$.

7. Ats. 283.

Nagrinėkime 4 atvejus: skaičiuje nėra lyginių skaitmenų, yra vienas lyginis skaitmuo, yra du lyginiai skaitmenys, visi trys skaitmenys lyginiai.

Pirmuoju atveju tinka visi skaičiai. Nelyginių skaitmenų yra 5, todėl tokių skaičių yra $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Antruoju atveju skaičius dalysis iš 4, nebent jei vienintelis lyginis skaitmuo bus skaičiaus gale. Skaičius $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai iš 4 dalijasi skaičius $10b + c$. Jei lyginis skaitmuo yra $c = 4$ arba 8, tai $10b + c$ nesidalys iš 4 su jokia nelygine b reikšme, taigi visi tokie skaičiai tinka. Kai turime skaitmenį 4, jį galime rašyti į bet kurią iš trijų pozicijų, o likusiose pozicijose bet kaip parinkti nelyginius skaitmenis galime $5 \cdot 5 = 25$ būdais. Taigi gauname 75 skaičius ir (analogiškai) dar 75 skaičius su skaitmeniu 8. Jei turime skaitmenį $c = 2$ arba 6, tai su bet kuria nelygine b reikšme $10b+c$ dalysis iš 4, tad čia joks skaičius netinka. Gavome 150 skaičių.

Jei trečiuoju atveju bent vienas skaitmuo yra 4 arba 8, tai padarę šį skaitmenį paskutiniu ir imdami kitą lyginį skaitmenį kaip b, gausime dalų iš 4 skaičių. Jei vienas iš lyginių skaitmenų yra 2 arba 6, tai padarę šį skaitmenį paskutiniu ir imdami nelyginį skaitmenį kaip b, gausime dalų iš 4 skaičių. Gavome 0 skaičių.

Jei ketvirtuoju atveju bent vienas skaitmuo yra 4 arba 8, tai padarę šį skaitmenį paskutiniu, gausime dalų iš 4 skaičių. O jei visi skaitmenys yra 2 arba 6, tai skaičius iš 4 nesidalys, nes nesidalija skaičiai 22, 26, 62, 66. Kiekvienas skaitmuo gali būti 2 arba 6, tad gauname $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ skaičius.

Iš viso radome $125 + 150 + 8 = 283$ skaičius.

8. Kiekvieną beveik kvadratą $n(n + 1)$ galima užrašyti kaip

$$\frac{(n^2 + 2n)(n^2 + 2n + 1)}{(n + 1)(n + 2)}.$$

9. Ats. $(p,q,r,s)=(2,3,7,43)$.

   Jei $p\geqslant 3$, tai $1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\geqslant 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}>\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\geqslant\frac{1}{pqrs}$. Todėl $p=2$. Toliau įrašę šią reikšmę, analogiškai gauname prieštarą, kai $q\geqslant 5$. Todėl $q=3$. Įrašę reikšmes ir panaikinę trupmenas, gauname lygtį $rs-6r-6s-1=0$ arba ekvivalenčią lygtį $(r-6)(s-6)=37$. Tada $r-6$ gali būti tik ± 1 arba ± 37. Tikrindami šias reikšmes, gauname vienintelį tinkamą atsakymą.

10. Ats. Skaičius $f(2015n)-f(n)$ visada nelyginis.

    Skaičiaus $f(n)$ lyginumas priklauso nuo to, koks yra suprastintų trupmenų nelyginių skaitiklių skaičius – lyginis ar nelyginis. Jei 2^a yra didžiausias dvejeto laipsnis, dalijantis n, tai $n=2^a k$, kur skaičius k yra nelyginis. Trupmenos m/n skaitiklis po suprastinimo yra lyginis tada ir tik tada, kai m dalijasi iš 2^{a+1}. Nuo 1 iki $n-1$ tokių skaičių m yra $[n/2^{a+1}]=[k/2]=(k-1)/2$. Tada nelyginių skaitiklių turime $n-1-(k-1)/2$. Skaičių $f(n)$ ir $n-1-(k-1)/2$ lyginumas sutampa. Be to, $2015n=2^a\cdot(2015k)$ ir, analogiškai, skaičių $f(2015n)$ ir $2015n-1-(2015k-1)/2$ sutampa. Kadangi skaičius

$$(2015n-1-(2015k-1)/2)-(n-1-(k-1)/2)=2014n-1007k$$

    visada nelyginis, tai toks yra ir skaičius $f(2015n)-f(n)$.

11. Ats. a) Taip; b) taip; c) ne.

    Skaičius $2N+1$ visada nelyginis, o skaičius $N/3$ yra to paties lyginumo kaip N. Todėl vos tik lentoje užrašomas nelyginis skaičius $2N+1$, visi tolimesni skaičiai nelyginiai. Taigi vieninteliai lyginiai skaičiai, kuriuos galima gauti, yra 12 ir 4. c) dalis išspręsta.

    Skaičių 29 galime gauti iš (nelyginio) skaičiaus 87, skaičių 87 – iš 43, šį iš 21, o 21 – iš 63.

    Lengva gauti skaičių 3: 12, 4, 9, $3=2^2-1$. Iš skaičiaus 2^n-1 gauname $2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$. Taigi galime gauti skaičius $2^3-1, 2^4-1, \ldots$ Taip gauname skaičių b) $2^{12}-1=4095$ bei skaičių $2^6-1=63$, todėl ir 21, 43, 87 bei a) 29.

12. Ats. a) Taip; b) ne.

    a) Turnyro pavyzdys (skaitytojui siūlome sudaryti lentelę): komanda A laimi prieš B ir pralaimi prieš likusias komandas, komanda B laimi prieš C ir D, pralaimi prieš E, F, G, komanda C laimi prieš E ir G, pralaimi prieš D ir F, komanda D laimi prieš F, pralaimi prieš E ir G, komanda E laimi prieš F, pralaimi prieš G, ir F laimi prieš G.

b) Tarkime, kad turnyre dalyvavo lygiai 6 komandos. Tada sužaista $C_6^2 = 15$ rungtynių ir komandos pelnė iš viso 15 taškų. Jei mažiausiai taškų surinkusi komanda A turėtų bent 2 taškus, tai jų iš viso būtų bent $2 + 3 \cdot 5 > 15$. Visos antroje vietoje nuo galo pagal taškus atsidūrusios komandos pralaimėjo A, todėl A pelnė bent 1 tašką, taigi lygiai 1 tašką, o antroje vietoje nuo galo yra lygiai viena komanda B. Komanda B surinko bent 2 taškus, o likusios 4 komandos – bent po 3. Jei bent vienas iš skaičių 2, 3, 3, 3, 3 būtų viršytas, tai iš viso taškų vėl būtų daugiau nei 15. Taigi rezultatų lentelėje turi būti skaičiai 1, 2, 3, 3, 3, 3. Po 3 taškus surinkusios komandos turėjo pralaimėti A arba B, tačiau tada A ir B sumoje turėtų bent 4 taškus, o ne 1+2. Gavome prieštarą.

13. Ats. Skaičių yra po lygiai.

Kiekvieną sekmadieninio sąrašo skaičių galime išskaidyti į 25 dviejų skaitmenų blokus. Tie blokai bus keturių rūšių: A=11, B=12, C=21, D=22. Iš tokių blokų sudarytas skaičius turės po lygiai vienetų ir dvejetų tada ir tik tada, kai blokų 11 ir 22 bus po lygiai (blokai 12 ir 21 vienetų ir dvejetų skaičių skirtumo nekeičia). Taigi sekmadieninį sąrašą sudaro visi 25-ženkliai skaičiai, sudaryti tik iš „skaitmenų" A, B, C, D, kuriuose „skaitmenų" A ir D yra po lygiai. Sąrašas toks pats kaip šeštadieninis, tik „skaitmenys" kitaip žymimi.

14. Ats. 41.

Tarkime, kad kurioje nors eilutėje visos spalvos yra skirtingos nei viršutinėje. Šiose dviejose eilutėse yra daugiausiai $5 + 5 = 10$ spalvų. Kiekvieno stulpelio sankirtoje su šiomis dviem eilutėmis jau yra po 2 skirtingas spalvas iš tų dešimties, todėl kiekviename stulpelyje yra dar papildomai daugiausiai po $5-2 = 3$ spalvas. Taigi spalvų yra ne daugiau nei $5 + 5 + 3 \cdot 10 = 40$.

Jei kiekvienoje eilutėje yra bent viena spalva, kuri yra ir viršutinėje eilutėje, tai viršutinėje eilutėje yra daugiausiai 5 spalvos, o kiekvienoje iš likusių eilučių – daugiausiai po $5 - 1 = 4$ kitokias spalvas. Taigi spalvų yra ne daugiau nei $5 + 4 \cdot 9 = 41$.

Pastaroji situacija galima: paveikslėlyje pažymėtus langelius nuspalvinkime 40-ia skirtingų spalvų, o likusius – 41-ąja.

X	X	X	X						
	X	X	X	X					
		X	X	X	X				
			X	X	X	X			
				X	X	X	X		
					X	X	X	X	
						X	X	X	X
X							X	X	X
X	X							X	X
X	X	X							X

15. Ats. Algirdas.

Jei lentoje užrašytas skaičius 1, tai jis ėjimą darančiam žaidėjui nelaimingas – žaidėjas neišvengiamai pralaimės. Skaičius 2 yra laimingas, nes žaidėjas gali gauti skaičių $2-1=1$, kuris nelaimingas jo konkurentui. Skaičius 3 nelaimingas, nes atėmus 1, gaunamas konkurentui laimingas skaičius 2, o atėmus daugiau, gaunamas neteigiamas skaičius. Toliau panašiai iš eilės imant skaičius, galima nustatyti kiekvieno skaičiaus n laimingumą: jei bent vienas mažesnis skaičius, kuriuo galima pakeisti n, nelaimingas, tai pats skaičius n laimingas, o jei visi mažesni skaičiai, kuriais galima pakeisti n, laimingi, tai n nelaimingas. Mums reikia nustatyti, ar skaičius 1345 laimingas (pirmąjį ėjimą darančiam Jaunučiui).

Galioja lygybė $1345 = 5\cdot 269$ (skaičius 269 pirminis), tad turime daliklius 1, 5, 269, 1345. Tarkime, kad po pirmojo Jaunučio ėjimo užrašytas nelyginis skaičius. Jaunutis turėjo atimti arba 2, arba 4 daliklius. Atėmęs 1345, jis iš karto pralaimėtų. Taigi galime laikyti, kad jis atėmė $1+5$, $1+269$ arba $5+269$ ir užrašė vieną iš skaičių 1339, 1075, 1071. Algirdas gali laikytis tokios strategijos: savo ėjimu gauti vieną iš skaičių $1339-13-103=1223$, $1075-1-5=1069$, $1071-3-7=1061$. Visi šie skaičiai yra pirminiai, todėl Jaunutis, nenorėdamas iš karto pralaimėti, turės atimti vienintelį daliklį 1 ir užrašyti lyginį skaičių.

Taigi jei Jaunutis iš karto nepralaimi, po jo pirmojo arba antrojo ėjimo lentoje atsiras tam tikras lyginis skaičius $a>0$. Jei skaičius $a-a/2=$ $=a/2$ nelaimingas, tai jis nelaimingas Jaunučiui ir Algirdas turi pergalės strategiją. O jei skaičius $a/2$ laimingas, tai iš jo galima atimti tam tikrus daliklius $d_1, d_2, \ldots$ ir gauti nelaimingą skaičių $b = a/2 - d_1 - d_2 - \ldots$.

Tačiau tada $a/2, d_1, d_2, \ldots$ yra skirtingi paties skaičiaus a dalikliai ($b > 0$, todėl $d_i < a/2$) ir juos atėmęs iš a Algirdas gaus nelaimingą (Jaunučiui) skaičių b – taigi ir šiuo atveju Algirdas turi pergalės strategiją.

16. Ats. 11/12.

Lentelės viršūnes pažymėkime A, B, C, D ir išveskime bet kurią įstrižainę, pvz., AC. Kiekvienas iš dviejų vidurinių langelių dalijamas į statųjį trikampėlį ir penkiakampį. Simetriški trikampėliai lygūs, todėl kiekvieno iš jų vienas iš statinių lygus pusei langelio kraštinės 1/2. Pagal lygius priešinius (arba atitinkamuosius) kampus šie trikampiai ir trikampis ABC yra panašūs, todėl statinių ilgių santykis kiekviename iš jų yra 2:3. Tada trikampėlio antrojo statinio ilgis yra 1/3, o plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Penkiakampio plotas gaunamas iš langelio ploto 1 atėmus $\frac{1}{12}$.

17. Ats. 6.

Kampas ADB lygus vienam iš trikampio DBC kampų. $\angle ADB = 180^\circ - \angle BDC = \angle DBC + \angle BCD$, todėl $\angle ADB > \angle DBC, \angle BCD$. Vadinasi, $\angle ADB = \angle BDC$. Pastarieji du kampai kartu sudaro 180°, todėl yra statieji. $AC \neq BC$, todėl $\angle BAD \neq \angle BCD \implies \angle BAD = \angle CBD$. Pagaliau $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \angle ABD + \angle BAD = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$. Taigi trikampiui ABC galime taikyti Pitagoro teoremą: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6$.

18. Ats. $20 + 2x_0$, kur x_0 yra vienintelė teigiama lygties $x^3 + 35x^2 + 56x = 7040$ šaknis.

Ieškomą pagrindo ilgį pažymėkime $20 + 2x$ ($x > 0$), o trapecijos aukštinės ilgį pažymėkime h. Aukštinės, išvestos iš trumpesniojo pagrindo galų, atskiria du stačiuosius trikampius su kraštinėmis $x, h, 13$. Pagal Pitagoro teoremą $x^2 + h^2 = 169$, o pagal trapecijos ploto formulę gauname, kad $180 = h(20 + x)$. Turime dvi lygtis su dviem nežinomaisiais. Eliminavę h, gauname lygtį $0 = x^4 + 40x^3 + 231x^2 - 6760x - 35200$. Ji turi (netinkamą) sprendinį $x = -5$, todėl ketvirto laipsnio daugianaris dalijasi iš $x + 5$. Tiksliau, jis lygus $(x + 5)(x^3 + 35x^2 + 56x - 7040)$. Gauname lygtį $x^3 + 35x^2 + 56x - 7040 = 0$. Funkcija $x^3 + 35x^2 + 56x$

griežtai didėja nuo 0 iki begalybės, kai $x > 0$, todėl su lygiai vienu x įgyja reikšmę 7040. Su šia vienintele reikšme $x_0 \approx 11{,}7$ ir gausime ieškomą ilgį $20 + 2x$.

19. a) Tiesė CI yra lygiašonio trikampio CED pusiaukampinė ir aukštinė, todėl taškai E ir D simetriški jos atžvilgiu, trikampis MED lygiašonis ir, be to, $\angle CED = 90° - \angle ACB/2$. Analogiškai $\angle AEF = 90° - \angle BAC/2$. Tada $\angle MDE = \angle MED = 180° - \angle AEF - \angle DEC = (\angle ACB + \angle BAC)/2 = 45°$ ir $\angle DME = 90°$. Atkarpa AN ir spindulys ID statmeni BC, todėl tarpusavyje lygiagretūs. Atkarpos AI ir ND statmenos EF, todėl tarpusavyje lygiagrečios. Taigi $AIDN$ yra lygiagretainis ir $AI = ND$.

    b) Lygiašoniuose trikampiuose AEF ir BFD turime $\angle AFE = 90° - \angle BAC/2$ ir $\angle BFD = 45°$, todėl $\angle MFD = 45° + \angle BAC/2$. Stačiajame trikampyje DFM turime $\angle MDF = 45° - \angle BAC/2 = \angle ACB/2 = \angle ICD$. Taigi statieji trikampiai DFM ir CID turi lygius kampus ir yra panašieji. Vadinasi, $FM = MD \cdot ID/DC = EM \cdot EI/EC$.

20. Ats. $60°$.

    (Sprendžiant svarbu turėti teisingą brėžinį. ω su taškais A, B, C ir centru O yra smailiojo kampo EDF viduje. Kadangi atkarpa AD turi tašką, esantį ω viduje (priklausantį stygai CE), tai antrasis kirstinės AD sankirtos su ω taškas yra tarp taškų A ir D. Antrąjį kirstinės CD ir ω sankirtos tašką pažymėkime A'. Arba A' yra tarp C ir D, arba C yra tarp A' ir D. Abiem atvejais $\angle DA'A = \angle CBA$ ir $\angle CBA < \angle CAB = \angle DCA$, nes $AC < BC$. Jei A' yra tarp C ir D, tai $\angle AA'D = \angle A'AC + \angle ACA' > \angle DCA$. Taigi taškas C yra tarp taškų D ir A'. Tada apskritimo taškai ratu išsidėstę tokia tvarka: C, F, A', B, A, E.)

    Turime $\angle ABF = \angle DCE = 180° - \angle ECA' = \angle EBA'$, todėl lankai AEF ir EFA' yra vienodo ilgio (į juos remiasi lygūs kampai). Kadangi taškai E ir F simetriški DO atžvilgiu, tai tokie yra ir taškai A bei A'. Tai reiškia, kad $DA = DA'$ ir $\angle DAA' = \angle DA'A$. Be to, $\angle DA'A = \angle CA'A = \angle CBA = \angle ADA'$, taigi trikampis ADA' lygiakraštis ir $\angle ABC = \angle ADA' = 60°$.