Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
Kęstutis Naujokaitis
Leidykla TYTO ALBA
3D Art
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

XXXI LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas 2016-09-24

1. Realieji skaičiai x ir y ($x \neq -2y$, $y \neq -2x$) tenkina lygybę $\frac{4x}{x+2y} - \frac{5y}{2x+y} = 1$. Raskite visas galimas reiškinio $\frac{x-2y}{4x+5y}$ reikšmes.

2. Įrodykite, kad vienas iš reiškinių $A = \frac{6x^2y^2+xy-1}{2xy+1}$ ir $B = \frac{x(x^2-1)-y(y^2-1)}{x-y}$ pasižymi savybe: jei $x \neq y$ ir $2xy + 1 \neq 0$, tai jo reikšmė visada didesnė už kito reiškinio reikšmę.

3. Įrodykite, kad jei
$$a = \frac{251}{\frac{1}{\sqrt[3]{252}-5\sqrt[3]{2}} - 10\sqrt[3]{63}} + \frac{1}{\frac{251}{\sqrt[3]{252}+5\sqrt[3]{2}} + 10\sqrt[3]{63}},$$
tai skaičius a^3 yra sveikasis.

4. Realieji skaičiai x, y, z, t tenkina lygčių sistemą
$$\begin{cases} (x+y)(z+t) = 2, \\ (x+z)(y+t) = 3, \\ (x+t)(y+z) = 4. \end{cases}$$
Raskite mažiausią galimą reiškinio $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ reikšmę.

5. Teigiami skaičiai x, y, z tenkina lygybę $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Įrodykite nelygybę
$$\frac{x^4 + 3xy^3}{x^3 + 2y^3} + \frac{y^4 + 3yz^3}{y^3 + 2z^3} + \frac{z^4 + 3zx^3}{z^3 + 2x^3} \leq 4.$$

6. Raskite visas pirminių skaičių poras (p, q), kurioms $p^4 - q^4$ yra natūralusis skaičius, turintis mažiau nei 8 (teigiamus) daliklius (įskaitant 1 ir patį skaičių).

7. Raskite visus teigiamus lygčių sistemos sprendinius (x, y, z):
$$\begin{cases} 3[x] - \{y\} + \{z\} = 20{,}3, \\ 3[y] + 5[z] - \{x\} = 15{,}1, \\ \{y\} + \{z\} = 0{,}9. \end{cases}$$
Čia $[t]$ žymi skaičiaus t sveikąją dalį (didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už t), o $\{t\} = t - [t]$ yra skaičiaus t trupmeninė dalis.

8. Raskite visus lygties $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$ natūraliuosius sprendinius (x, y).

9. Audrius užrašė devynis devynženklius natūraliuosius skaičius. Kiekviename skaičiuje yra visi skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Užrašytųjų skaičių sumos paskutinieji k skaitmenų yra nuliai. Raskite didžiausią galimą skaičiaus k reikšmę.

10. Įrodykite: bet kuriam natūraliajam skaičiui $n > 1$ egzistuoja toks natūralusis skaičius $m > n^n$, kad $n^m - m^n$ dalijasi iš $n + m$.

11. Yra 32 lempos, kiekviena su savo jungikliu, kurios pradžioje visos išjungtos. Paspaudus jungiklį, išjungta lempa užsidega, o įjungta lempa užgęsta. Vienu ėjimu leidžiama paspausti bet kurių lygiai penkių lempų jungiklius. Laima nori, kad visos lempos degtų vienu metu. Kiek mažiausiai ėjimų jai prireiks?

12. Kiekviename 5×5 lentelės langelyje įrašytas vienas iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5. Bet kurie du skaičiai, esantys vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, skirtingi. Lentelės langelį vadinkime „gerai apgyvendintu”, jei jame esantis skaičius a tenkina šias dvi sąlygas:
1) visi toje pačioje eilutėje esantys skaičiai, didesni už a, yra iš vienos pusės (iš kairės arba iš dešinės) nuo a, o visi mažesni už a skaičiai – iš kitos (atitinkamai iš dešinės arba iš kairės);
2) visi tame pačiame stulpelyje esantys skaičiai, didesni už a, yra iš vienos pusės nuo a (virš skaičiaus a arba po juo), o visi mažesni už a skaičiai – iš kitos (atitinkamai po skaičiumi a arba virš jo).
Kiek daugiausiai „gerai apgyvendintų” langelių gali būti lentelėje?

13. Stačiakampę natūraliųjų skaičių lentelę sudaro keturios eilutės. Kiekvienoje eilutėje visi skaičiai skirtingi, o kiekvieno stulpelio keturių skaičių suma yra 20. Kiek daugiausiai stulpelių gali turėti lentelė?

14. Darbštusis Antanas lentoje užrašė skaičius $1, 2, 3, \ldots, n$ (čia $n \geq 3$). Ėjimo metu galima pasirinkti bet kuriuos du užrašytus skaičius ir padidinti juos, prie kiekvieno pridėjus po tą patį laisvai pasirinktą natūralųjį skaičių. Antanas nori, kad visi užrašyti skaičiai būtų lygūs. Raskite visas n reikšmes, kurioms tai įmanoma padaryti.

15. Lentoje užrašytos 9 žvaigždutės *********. Gervazas ir Protazas žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus ir naudodami skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Gervazas, kuris ir pradeda žaidimą, ėjimo metu turi įrašyti skaitmenį vietoj bet kurios žvaigždutės. Savuoju ėjimu Protazas turi pakeisti skaitmenimis bet kurias dvi žvaigždutes. Skaitmenį galima panaudoti tik vieną kartą. Protazas laimi, jeigu galutinis skaičius su devyniais skirtingais skaitmenimis, gautas žaidėjams atlikus po tris ėjimus, dalijasi iš 27. Ar Protazas turi pergalės strategiją (t. y. ar jis visada gali laimėti, kaip bežaistų Gervazas)?

16. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, o tiesės AB ir CD kertasi taške E. Trikampio ADE apibrėžtinio apskritimo liestinė taške D kerta tiesę CB taške F. Įrodykite, kad trikampis CDF lygiašonis.

17. Duotas statusis lygiašonis trikampis ABC ($\angle BAC = 90°$). Pažymėtas toks taškas D, kad $BD \perp BC$ ir $AD = BC$. Raskite $\angle BAD$.

18. Trikampio ABC kraštinės ir kampai tenkina sąlygas: $BC + AC = 2AB$ ir $\angle BAC - \angle CBA = 90°$. Raskite $\cos \angle ACB$.

19. Trikampyje ABC nubrėžtos aukštinės AD, BE ir CF. Iš vienos aukštinės pagrindo D į atkarpas AB, BE, CF ir AC nuleisti statmenys, kurių pagrindai atitinkamai pažymėti P, Q, R ir S. Įrodykite, kad šie keturi taškai yra vienoje tiesėje.

20. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės BC vidurio taškas pažymėtas M. Įrodykite: jeigu $\angle DAB = 90°$ ir $\angle ADC = \angle BAM$, tai $\angle ADB = \angle CAM$.