XXXI Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. -3 ir 0.

   Padauginę duotąją lygybę iš dviejų vardiklių sandaugos ir sutraukę panašius narius gauname: $0 = 6x^2 - 6xy - 12y^2 = 6(x+y)(x-2y)$. Taigi $x = -y$ arba $x = 2y$. Tada $\frac{x-2y}{4x+5y} = \frac{-y-2y}{-4y+5y} = -3$ arba $\frac{x-2y}{4x+5y} = 0$.

2. Kadangi $6x^2y^2 + xy - 1 = (2xy+1)(3xy-1)$, tai $A = 3xy - 1$. Kadangi $x(x^2-1) - y(y^2-1) = (x^3-y^3) - (x-y) = (x-y)(x^2+xy+y^2-1)$, tai $B = x^2+xy+y^2-1$ ir $B - A = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 > 0$ (kai $x \neq y$). Taigi $B > A$.

3. Pažymėkime $b = \sqrt[3]{252}$, $c = 5\sqrt[3]{2}$. Tada $(b-c)(b^2+bc+c^2) = b^3 - c^3 = 2$, $(b+c)(b^2-bc+c^2) = b^3+c^3 = 502$ ir $bc = 10\sqrt[3]{63}$. Vadinasi,
$$a = \frac{251}{\frac{1}{b-c} - bc} + \frac{1}{\frac{251}{b+c} + bc} = \frac{502}{\frac{2}{b-c} - 2bc} + \frac{2}{\frac{502}{b+c} + 2bc} =$$
$$= \frac{502}{b^2-bc+c^2} + \frac{2}{b^2+bc+c^2} = (b+c) + (b-c) = 2b,$$
ir $a^3 = 8b^3 = 2016$.

4. Ats. 7.

   Pažymėkime $s = x+y+z+t$, $u = x+t$, $v = y+z$. Kadangi $u^2 - 2uv + v^2 \geqslant 0 \implies s^2 = (u+v)^2 \geqslant 4uv = 4 \cdot 4 = 16$, tai $x^2+y^2+z^2+t^2 = s^2 - (x+y)(z+t) - (x+z)(y+t) - (x+t)(y+z) = s^2 - 9 \geqslant$ $\geqslant 16 - 9 = 7$.

   Būtina patikrinti, kad reikšmė 7 yra pasiekiama! Vienam iš galimų sistemos sprendinių $(x,y,z,t) = (\frac{3+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ turime $s = 4$ ir todėl $x^2+y^2+z^2+t^2 = s^2 - 9 = 7$. (Sprendinį galima rasti taip. Gautos nelygybės virsta lygybėmis, kai $x+t = y+z = 2$. Tada $2 = (x+y)((2-x)+(2-y))$ ir $3 = (x+(2-y))(y+(2-x)) \implies (x+y)^2 - 4(x+y) + 2 = 0$ ir $(x-y)^2 = 1$. Pasirinkime vieną iš variantų $x+y = 2+\sqrt{2}$, $x-y = 1$.)

5. Kadangi $x^3+2y^3=x^3+y^3+y^3\geqslant 3\sqrt[3]{x^3\cdot y^3\cdot y^3}=3xy^2$ (aritmetinis ir geometrinis vidurkiai), tai
$$\frac{x^4+3xy^3}{x^3+2y^3}=x+\frac{xy^3}{x^3+2y^3}\leqslant x+\frac{xy^3}{3xy^2}=x+\frac{y}{3}.$$
Galioja dar dvi analogiškos nelygybės, todėl kairioji nelygybės pusė ne didesnė nei
$$x+\frac{y}{3}+y+\frac{z}{3}+z+\frac{x}{3}=4\cdot\frac{x+y+z}{3}\leqslant 4\cdot\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=4$$
(pabaigoje pritaikėme aritmetinio ir kvadratinio vidurkių nelygybę).

6. Ats. $(3,2)$.
Žinoma, $p>q$. Tarkime, kad $p-q>1$. Tada
$$1<p-q<p+q<(p-q)(p+q)=p^2-q^2<p^2+q^2<$$
$$<(p-q)(p^2+q^2)<(p+q)(p^2+q^2)<(p-q)(p+q)(p^2+q^2),$$
ir visi šie 8 skirtingi skaičiai dalija $p^4-q^4=(p-q)(p+q)(p^2+q^2)$.
Taigi $p-q=1$. Tada vienas iš pirminių skaičių yra lyginis, todėl lygus 2. Gauname vienintelę porą $(3,2)$, kuriai skaičius $3^4-2^4=65$ turi tik 4 teigiamus daliklius.

7. Ats. (7,9, 2,8, 2,1).
Kadangi $0\leqslant\{x\},\{y\},\{z\}<1$, tai $3[x]=20{,}3+\{y\}-\{z\}$ yra sveikasis skaičius, dalus iš 3 ir esantis tarp skaičių $20{,}3+0-1(>19)$ ir $20{,}3+1-0(<22)$. Vienintelis toks skaičius yra 21, todėl $[x]=7$ ir $\{y\}-\{z\}=0{,}7$. Tada $2\{y\}=(\{y\}-\{z\})+(\{y\}+\{z\})=1{,}6$, $\{y\}=0{,}8$, $\{z\}=0{,}1$.
Analogiškai $3[y]+5[z]=15{,}1+\{x\}$ yra sveikasis skaičius, esantis tarp $15{,}1+0(>15)$ ir $15{,}1+1(<17)$. Todėl $3[y]+5[z]=16$ ir $\{x\}=0{,}9$. Kadangi $y,z>0$, tai $[y],[z]\geqslant 0 \implies 0\leqslant[z]=(16-3[y])/5\leqslant 16/5<4$. Tikrindami galimas reikšmes $[z]=0,1,2,3$, randame vienintelę tinkamą reikšmę $[z]=2$: tada ir $[y]=2$ yra sveikasis skaičius. Taigi $x=[x]+\{x\}=7{,}9$, analogiškai $y=2{,}8$, $z=2{,}1$.

8. Ats. $(1,4),(4,1),(4,4)$.

   Padauginkime duotąją lygybę iš 2 ir pertvarkykime ją: $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y}-1)^2 = 2$. Todėl $\sqrt{x}-1 \leqslant \sqrt{2}$ ir $x \leqslant 3+2\sqrt{2} < 6$. Taigi $x = 1,2,3,4$ arba 5.

   Abi lygybės $x+y-\sqrt{x} = \sqrt{yx}+\sqrt{y}$ puses pakelkime kvadratu ir išreikškime $\sqrt{x}$:
$$\sqrt{x} = \frac{x^2+xy+y^2+x-y}{2x+4y}.$$
   Taigi $\sqrt{x}$ yra racionalusis skaičius: $x = 1$ arba 4. Analogiškai $y = 1$ arba 4. Likusius variantus perrenkame, tikrindami pradinę lygybę.

9. Ats. 8.

   Reikšmė $k = 8$ galima, nes $987654321 \cdot 8 + 198765432 = 81 \cdot 10^8$ (tai lengva patikrinti, sudedant 9 dėmenis stulpeliu). Kita vertus, visi sumos dėmenys būtinai dalijasi iš 9 (pagal dalumo požymį). Todėl jei $k \geqslant 9$, tai suma ne mažesnė nei $9 \cdot 10^9$. Tačiau ji ne didesnė nei $987654321 \cdot 9 < 9 \cdot 10^9$. Taigi $k < 9$.

10. Vietoj m nagrinėkime $k = n+m$. Reikia įrodyti: egzistuoja toks natūralusis skaičius $k > n^n + n$, kad $a = n^{k-n} - (k-n)^n$ dalijasi iš k. Vietoj a užtenka nagrinėti $b = n^{k-n} - (-n)^n = n^n(n^{k-2n} - (-1)^n)$, nes $b \equiv a \pmod{k}$. Jei n nelyginis, tai tinka $k = 2n^n$, o jei n lyginis ir $n > 2$, tai imkime $k = n^n(n-1)$. Abiem atvejais $k \geqslant 2n^n > n^n + n > 2n$ ir k dalija b (2 dalija $n^{k-2n}+1$, kai n nelyginis, ir $n-1$ dalija $n^{k-2n}-1$, kai n lyginis). Kai $n = 2$, tinka $k = 7$.

    Galimos k reikšmės nėra vienintelės. Pvz., kai n lyginis, pagal Mažąją Ferma teoremą tinka $k = 2np$, kur p – bet koks pakankamai didelis pirminis skaičius.

11. Ats. 8.

    Tarkime, po kelių ėjimų visos lempos įjungtos, o skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{32}$ parodo, kiek kartų buvo paspaustas kiekvienos lempos jungiklis. Tada visi šie skaičiai nelyginiai, o jų suma s lyginė (turime lyginį nelyginių skaičių kiekį). Be to, s lygi penkiagubam ėjimų skaičiui, taigi ji dalijasi iš 10. Tada $s \geqslant 1+1+\ldots+1 = 32 \implies s \geqslant 40$. Ėjimų skaičius ne mažesnis nei $40 : 5 = 8$.

Tiek ėjimų užteks: suskirstykime lempas į 6 penketus, tada lieka dar dvi lempos A ir B. Pirmais 6 ėjimais uždekime visus penketus, o tada viename iš penketų pasirinkime 4 lempas C, D, E ir F. Septintuoju ėjimu paveikime A, C, D, E, F, o aštuntuoju – B, C, D, E, F.

12. Ats. 5.

A				A
	B		B	
		C		
	B		B	
A				A

Jei skaičius 2 yra „gerai apgyvendintame" langelyje, tai jo eilutėje vienoje pusėje nuo jo turi būti lygiai vienas langelis (su skaičiumi 1). Tas pats galioja ir stulpeliui. Todėl toks „gerai apgyvendintas" langelis tegali būti vienas iš langelių B (žr. pav.). Analogiškai, „gerai apgyvendintas" langelis su skaičiumi 4 turi būti vienas iš langelių B. „Gerai apgyvendintas" langelis su skaičiumi 1 arba 5 turi būti vienas iš langelių A, o „gerai apgyvendintas" langelis su skaičiumi 3 tegali būti langelis C. Be to, raidėmis pažymėtuose „gerai apgyvendintuose" langeliuose viršutinėse dviejose eilutėse gali būti tik vienas iš skaičių 1 ir 2 (priešingu atveju viršutinėje eilutėje būtų du vienetai: vienas langelyje A, kitas – tiesiai virš langelio B) ir (analogiškai) tik vienas iš skaičių 4 ir 5. Todėl čia yra daugiausiai du „gerai apgyvendinti" langeliai. Tas pats galioja ir dviem apatinėms eilutėms. Vidurinėje eilutėje tinkamas langelis tik vienas. Taigi iš viso „gerai apgyvendintų" langelių gali būti daugiausiai $2 + 2 + 1 = 5$.

Pavyzdį su „gerai apgyvendintais" 5 langeliais lengva gauti, dviejuose priešinguose lentelės kampuose įrašius po skaičių 1, kituose kampuose – po skaičių 5, o lentelės viduryje C – skaičių 3 (užpildžius visą lentelę, langeliai A ir C bus „gerai apgyvendinti").

13. Ats. 9.

Devynis stulpelius iš viršaus į apačią galima užpildyti taip: 1-2-8-9, 2-8-9-1, 8-9-1-2, 9-1-2-8, 3-4-6-7, 4-6-7-3, 6-7-3-4, 7-3-4-6, 5-5-5-5.

Tarkime, kad lentelėje yra bent 10 stulpelių. Tada dešimtyje stulpelių esančių 40-ies skaičių suma yra 200. Kita vertus, kiekvienas skaičius tuose stulpeliuose įrašytas daugiausiai 4 kartus, todėl mažiausia galima sumos reikšmė lygi $(1+1+1+1)+(2+2+2+2)+\ldots+(10+10+10+10) = = 220 > 200$. Gauname prieštarą.

14. Ats. n yra nelyginis arba dalus iš 4 skaičius.

Jei $n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}$, tai skaičius galima sulyginti taip: poras $(1,2), (3,4), \ldots, (4k-1, 4k)$ paversti į $(4k, 4k+1)$, tada visus gautus skaičius $4k$ suskirstyti į k porų ir jas paversti į $(4k+1, 4k+1)$.

Jei $n = 4k-1,\ k \in \mathbb{N}$, tai skaičius galima sulyginti taip: poras $(1,2)$, $(3,4),\ \ldots, (4k-3, 4k-2)$ paversti į $(4k-1, 4k)$, tada visus gautus skaičius $4k-1$ suskirstyti į k porų ir jas paversti į $(4k, 4k)$.

Jei $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}$, tai skaičius galima sulyginti taip: poras $(1,2), (3,4)$, $\ldots, (4k-1, 4k)$ paversti į $(4k-1, 4k)$, tada visus gautus skaičius $4k-1$ suskirstyti į k porų ir jas paversti į $(4k, 4k)$.

Lieka atvejis $n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}$. Pradžioje užrašytųjų skaičių suma yra $1+2+\ldots+(4k+2) = (2k+1)(4k+3)$ – ji nelyginė. Po kiekvieno ėjimo ši suma padidėja lyginiu skaičiumi, todėl lieka nelyginė. Vadinasi, skaičiai niekada netaps lygūs tam pačiam skaičiui a, nes tada suma būtų $(4k+2)a$ – lyginis skaičius.

15. Ats. Protazas turi pergalės strategiją.

Jei triženklis skaičius $\overline{abc}$ dalijasi iš 27, tai

$$0 \equiv 10\overline{abc} \equiv 1000a + 100b + 10c \equiv 100b + 10c + a \equiv \overline{bca} \pmod{27}.$$

Tada $\overline{bca}$ ir (analogiškai) $\overline{cab}$ dalijasi iš 27.

Todėl Protazo strategija gali būti tokia. Jis gali imti skaičių, dalių iš 27, aibę $A = \{189, 243, 567\}$ (svarbu, kad čia po vieną kartą sutinkami visi 9 skaitmenys), o reiškinį ********* padalyti į tris trižvaigždžius blokus: ***   ***   ***. Po Gervazo ėjimo, kai blokui U priklausanti žvaigždutė pakeičiama skaitmeniu d, Protazas turi imti aibės A skaičių $x = \overline{abc}$, kuris turi skaitmenį d, ir pakeisti likusias dvi bloko U žvaigždutes nepanaudotais skaičiaus x skaitmenimis taip, kad bloko U skaitmenys sudarytų vieną iš skaičių $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}$. Kadangi visi trys blokai virsta triženkliais skaičiais, daliais iš 27, tai ir gautas devynženklis skaičius dalijasi iš 27.

16. Tiesėje DF, bet ne spindulyje DF pažymėkime tašką X. Apskritimo ADE stygos ir liestinės sudaromas kampas $\angle EDX = \angle FDC$ (ribinis įbrėžtinio kampo atvejis) lygus įbrėžtiniam kampui DAE. Įbrėžtiniame keturkampyje $ABCD$ turime $\angle BCD = 180° - \angle BAD = \angle DAE$. Taigi $\angle FCD = \angle BCD = \angle DAE = \angle FDC \implies FC = FD$.

17. Ats. $15°$ arba $105°$.

    Nubrėžkime trikampio ABD aukštinę AH. Tada $\angle ABH = 90° - \angle ABC = 45°$, todėl statusis trikampis ABH lygiašonis. Taigi $AH = AB : \sqrt{2} = (BC : \sqrt{2}) : \sqrt{2} = AD : 2$. T. y. stačiojo trikampio AHD statinis AH perpus trumpesnis nei įžambinė AD ir todėl $\angle ADH = 30° \implies \angle DAH = 60°$. Galimi du atvejai: 1) jei taškas H yra tarp B ir D, tai $\angle BAD = \angle DAH + \angle HAB = 60° + 45° = 105°$; 2) priešingu atveju $\angle BAD = \angle DAH - \angle HAB = 60° - 45° = 15°$.

18. Ats. $\frac{3}{4}$.

    Pažymėkime $\beta = \angle ABC$, tada $\angle BAC = 90° + \beta$, $\angle ACB = 90° - 2\beta$. Pagal sinusų teoremą,

$$BC : AC = \sin(90° + \beta) : \sin\beta = \cos\beta : \sin\beta,$$

$$1 + BC : AC = 2AB : AC = 2\sin(90° - 2\beta) : \sin\beta = 2\cos 2\beta : \sin\beta,$$

$$2\cos 2\beta = \sin\beta \cdot (1 + \cos\beta : \sin\beta) = \sin\beta + \cos\beta,$$

$$4(1 - \sin^2 2\beta) = 4\cos^2 2\beta = \sin^2\beta + \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta = 1 + \sin 2\beta.$$

    Taigi $\cos\angle ACB = \cos(90° - 2\beta) = \sin 2\beta (\neq -1$, nes $0 < \angle ACB < \pi)$ yra lygties $4(1 - x^2) = 1 + x$ sprendinys. Padaliję lygtį iš $x + 1 \neq 0$, randame $x = \frac{3}{4}$.

19. Trikampio ABC ortocentrą pažymėkime H. Pastebėkime įbrėžtinius keturkampius: $HFBD$ ($\angle BFH + \angle BDH = 180°$), $PBDQ$ ($\angle BPD = \angle BQD$), $FPDR$ ($\angle DPF + \angle DRF = 180°$). Juose pastebėkime lygius įbrėžtinius kampus: $\angle DPR = \angle DFR = \angle DFH = \angle DBH = \angle DBQ = \angle DPQ$. Todėl tiesės PR ir PQ sutampa, o taškai P, Q, R yra vienoje tiesėje. Analogiškai, taškai Q, R, S yra vienoje (toje pačioje) tiesėje.

20. Pažymėkime tokį tašką Q, kad M būtų atkarpos AQ vidurys. Keturkampio $ABQC$ įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl jis lygiagretainis ir $QC||AB \implies QC \perp AD$. Be to, $\angle MAD = 90° - \angle BAM = = 90° - \angle ADC$, todėl $CD \perp AQ$. Vadinasi, QC ir DC yra trikampio AQD aukštinių atkarpos, o tada trečioji aukštinė yra tiesėje AC. Lygiagretainio $ABQC$ kraštinė BQ lygiagreti su AC, todėl ir ji statmena QD. Kadangi kampai BAD ir BQD statūs, tai keturkampis $ABQD$ įbrėžtinis. Todėl $\angle ADB = \angle AQB$ (įbrėžtiniai kampai)$= \angle CAM$ (AQ kerta lygiagrečias tieses AC ir BQ).