Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
Leidykla TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

XXXII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2017-09-23

1. Raskite lygčių sistemos
$$\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=4,\\(x-y)(x^2+y^2)=\frac{5}{2}\end{cases}$$
visus realiuosius sprendinius (x,y).

2. Realieji skaičiai x,y,z,t tenkina lygčių sistemą
$$\begin{cases}x(6-y)=9,\\y(6-z)=9,\\z(6-t)=9,\\t(6-x)=9.\end{cases}$$
a) Įrodykite, kad $x,y,z,t>0$.

b) Raskite sistemos visus realiuosius sprendinius (x,y,z,t).

3. Raskite visas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kurioms lygybė
$$x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=0$$
galioja su kiekvienu $x\in\mathbb{R}$.

4. Raskite lygčių sistemos
$$\begin{cases}x^3+y=4z,\\x+y^3=z,\\xy=-1\end{cases}$$
visus realiuosius sprendinius (x,y,z).

5. Teigiami skaičiai x,y,z tenkina lygybę $xyz=1$. Įrodykite nelygybę
$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\geq 3.$$

6. Skaičius p pirminis, o skaičius $3p+10$ yra šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratų suma. Įrodykite, kad $p-7$ dalijasi iš 36.

7. Sveikųjų skaičių aibę pažymėkime $\mathbb{Z}$.

a) Ar bet kuriems to paties lyginumo natūraliesiems skaičiams a ir b egzistuoja tokie realieji skaičiai $x\notin\mathbb{Z}$ ir $y\notin\mathbb{Z}$, kad $x+y\in\mathbb{Z}$ ir $ax+by\in\mathbb{Z}$?

b) Ar bet kuriems skirtingo lyginumo natūraliesiems skaičiams a ir b egzistuoja tokie realieji skaičiai $x\notin\mathbb{Z}$ ir $y\notin\mathbb{Z}$, kad $x+y\in\mathbb{Z}$ ir $ax+by\in\mathbb{Z}$?

8. Natūraliojo skaičiaus a skaitmenų sumą žymėkime $S(a)$. Ar egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad
$$S(n) \cdot S(n+1) = 465 \ ?$$

9. Natūralieji skaičiai a ir b tenkina sąlygą
$$a - b = 5b^2 - 4a^2 > 0.$$
Įrodykite, kad $a - b$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

10. Natūraliojo skaičiaus N bet kuriam teigiamam dalikliui d (įskaitant daliklius 1 ir N) skaičius $d + 2$ yra pirminis. Kiek daugiausiai teigiamų daliklių gali turėti N?

11. Dėžėje sumaišytos guli 100 kortelių, iš eilės sunumeruotos skaičiais 1, 2, 3, ..., 100. Kiek mažiausiai kortelių reikia nežiūrint ištraukti iš dėžės, kad ištrauktų skaičių sandauga būtinai dalytųsi iš 192?

12. Į 100×100 lentos apatinio kairiojo 3×3 kvadrato 9 langelius padėta po šaškę. Kiekvieno ėjimo metu kuri nors šaškė turi peršokti gretimą langelį, kuriame yra kita šaškė, ir taip atsidurti laisvame langelyje, esančiame iš karto už jo. (Gretimas langelis – turintis bendrą kraštinę su šaškės langeliu.) Ar galima atliekant ėjimus padaryti, kad šaškės dengtų visus viršutinio kairiojo 3×3 kvadrato 9 langelius?

13. Nagrinėkime aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 101\}$ bet kuriuos 2^{51} skirtingų poaibių. Įrodykite, kad vienas iš tų poaibių yra kitų dviejų sąjungos poaibis.

14. Kvadrato 12×12 viduje pažymėtas 241 taškas. Dalis taškų raudoni, o likę – mėlyni. Įrodykite, kad egzistuoja skritulys su skersmeniu 5, dengiantis mažiausiai 11 vienspalvių taškų.

15. Penkių futbolo komandų turnyre bet kurios dvi komandos sužaidė po vieną kartą. Už pergalę vieneriose rungtynėse komanda gauna 5 taškus, už pralaimėjimą gauna 0 taškų, už lygiąsias rezultatu 0:0 gauna 1 tašką, o už kitokias lygiąsias gauna 2 taškus. Galutiniai komandų rezultatai yra penki iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Kiek mažiausiai įvarčių galėjo būti įmušta turnyro metu?

16. Iškilojo keturkampio $ABCD$ viduje pažymėtas taškas X. Ar gali vienu metu galioti lygybės: $AX = AD$, $BX = BA$, $CX = CB$, $DX = DC$?

17. Trikampis ABC tenkina lygybes $\angle ABC = 90°$, $AB = 1$, $BC = 2$. Kvadrato $DEFG$ kraštinė DE yra atkarpoje BC, viršūnė F yra atkarpoje AC, o likusi kvadrato dalis – trikampio ABC viduje. Raskite kvadrato $DEFG$ kraštinės ilgį, jei $AG = 1$.

18. Iškilojo penkiakampio $ABCDE$ visos kraštinės lygios. Raskite $\angle ACE$, jei $\angle BCD = 2\angle ACE$.

19. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindai yra BC ir AD. Apskritimas ω, einantis per B ir C, kerta kraštinę AB ir įstrižainę BD atitinkamai taškuose $X \neq B$ ir $Y \neq B$. Jo liestinė taške C kerta spindulį AD taške Z. Įrodykite, kad taškai X, Y ir Z yra vienoje tiesėje.

20. Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas ω liečia kraštinę BC taške K. Apskritimas su centru J, liečiantis atkarpą BC ir tieses AB bei CA, yra trikampio ABC išorėje. Tiesė KJ kerta ω taške $P \neq K$. Įrodykite, kad trikampio BCP apibrėžtinis apskritimas: a) eina per atkarpos JK vidurio tašką E; b) liečia ω.