LIETUVOS RESPUBLIKOS KULTŪROS IR ŠVIETIMO MINISTERIJA

LEIDYBOS CENTRAS

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖS OLIMPIADOS

Sudarė Algirdas Zabulionis

Vilnius 1991

Respublikinės jaunųjų matematikų olimpiados šiais metais švenčia keturiasdešimtmetį. Šis masiškiausias ir populiariausias moksleivių matematinis konkursas nėra vienintelis respublikoje - jau keleri metai Vilniaus Universitetas kartu su Kultūros ir Švietimo ministerija organizuoja komandines olimpiadas. Prieš keturiasdešimt metų prie matematikos olimpiadų ištakų stovėjo profesorius Jonas Kubilius. Ir dabar, 1986 metais, jis įsteigė prizą "Geriausiai Lietuvos jaunųjų matematikų komandai". Prizas komandai, todėl ir naujoji olimpiada netradicinė - ji komandinė. Penki vyresniųjų klasių moksleiviai kolektyviai 4 valandas sprendžia 20 matematinių uždavinių. Galima diskutuoti, ginčytis, tartis... Visų uždavinių vienas net ir labai talentingas moksleivis nespėtų išspręsti, todėl svarbi uždavinių sprendimo taktika: kas kurį spręs, kas tik generuos idėjas, o kas rašys sprendimus. Keturios valandos sprendžiant uždavinius prabėga labai greitai ir, kol moksleiviai pietauja, Vilniaus Universiteto Matematikos fakulteto dėstytojai ištaiso pateiktus darbus. Vakare - trumpa sprendinių analizė, nugalėtojų apdovanojimas.

Visose įvykusiose olimpiadose dalyvavo Universiteto Matematikos fakulteto pirmakursių komanda. Ji paprastai būna sudaryta iš respublikinės olimpiados laureatų ir prizininkų. Ši komanda dalyvauja be konkurencijos. Tokiomis pačiomis teisėmis paskutinėse olimpiadose dalyvavo ir svečių komandos: IV olimpiadoje - Estijos ir Latvijos, V olimpiadoje - Vengrijos.

Latviai į Vilnių atsiuntė komandą, sudarytą vien iš sąjunginės jaunųjų matematikų olimpiados pirmos ar antros vietos laimėtojų, tarp kurių du moksleiviai buvo pirmi dukart (jiems tokią komandą sudaryti nėra sunku: 1990 metais sąjunginėje olimpiadoje jų rezultatai fantastiški - 5 pirmos, 3 ant[illegible], 4 trečios

vietos).

Nors Vengrijos komandoje nebuvo abiturientų, tai buvo stipri komanda, kurios nariai jau spėjo įgyti patirties matematiniuose konkursuose Kinijoje, Austrijoje, Izraelyje.

1989 metų vasarą Vilnių, Rygą ir Taliną sujungė "Baltijos kelias". Todėl rudenį į ketvirtąją Lietuvos komandinę jaunųjų matematikų olimpiadą atvažiavus Latvijos ir Estijos komandoms, buvo sutarta organizuoti matematinį konkursą šiam įvykiui pažymėti. Idėją palaikė trijų respublikų švietimo ministerijų vadovai, o Estijos Liaudies frontas, Latvijos Liaudies Frontas ir Lietuvos Sąjūdis įsteigė pereinamąjį "Baltijos kelio" prizą geriausiai Baltijos šalių jaunųjų matematikų komandai. 1990 metų lapkrityje Rygoje įvyko pirmoji Baltijos šalių jaunųjų matematikų komandinė olimpiada "Baltijos kelias", kurioje dalyvavo po dvi Estijos, Latvijos ir Lietuvos komandos. Ši olimpiada panaši į Lietuvos komandinę olimpiadą (komanda, 5 vyresniųjų klasių moksleiviai, 5 valandas kolektyviai sprendžia 20 matematinių uždavinių) ir todėl Lietuvą joje atstovavo dvi geriausiai pasirodžiusios V Lietuvos komandinėje olimpiadoje komandos - Kauno miesto "Saulės" vidurinės mokyklos ir Šiaulių miesto.

II Baltijos šalių jaunųjų matematikų komandinė olimpiada vyks 1991 metų rudenį Estijoje.

Lietuvos jaunųjų matematikų komandinių olimpiadų rezultatai

	1986	1987	1988	1989	1990
1. VU MaF (be konk.)	109	77	96	58	85
2. Vilnius (mat.)	88	67	51	27	34
3. Vilnius	40	73	34	21	34
4. Kaunas (mat.)	63	36	62	8	41
5. Kaunas	35	46	27	15	24
6. Trakai	-	25	11	6	9
7. Alytus	-	-	21	-	16
8. Panevėžys	-	-	15	3	12
9. Marijampolė	-	-	25	8	16
10. Šiauliai	-	-	-	-	35
11. Latvija (be konk.)	-	-	-	89	-
12. Estija (be konk.)	-	-	-	13	-
13. Vengrija (be konk.)	-	-	-	-	106

Lentelėje pateikti komandų surinkti taškai. Kiekvieno iš 20 uždavinio teisingas sprendimas vertinamas 5 taškais. Komanda už uždavinį pelno premijinius taškus:

- jei ji vienintelė teisingai išsprendė uždavinį - 3 taškus.
- jei buvo tik du teisingi uždavinio sprendimai - 2 taškus.
- jei buvo tik trys teisingi uždavinio sprendimai - 1 tašką.

Pastaba. Vilnius (mat.) - Vilniaus miesto sustiprinto matematikos mokymo mokyklų komanda, Kaunas (mat.) - Kauno "Saulės" vidurinės mokyklos komanda.

Profesoriaus Jono Kubiliaus pereinamosios taurės "Geriausiai Lietuvos jaunųjų matematikų komandai" laimėtojai

1986 m. Vilniaus miesto sustiprinto matematikos mokymo mokyklų komanda:

1. E.Usanovas, A.Vienuolio vid.m-kla, 12 kl. (V.Baltinytė)
2. V.Steponkus, A.Vienuolio vid.m-kla, 12 kl. (V.Baltinytė)
3. G.Čiuprinskas, A.Vienuolio vid. m-kla, 10 kl. (R.Žižienė)
4. Ž.Sušinskas, 40 vid.m-kla, 12 kl.(V.Vitkus)
5. E.Nekrašaitė, 40 vid.m-kla, 12 kl. (V.Vitkus)
6. A.Marazas, 40 vid.m-kla, 12 kl. (J.Šarkanas)

Komandos vadovas - mokytojas V.Vitkus.

1987 m. Vilniaus miesto bendrojo lavinimo mokyklų komanda:

1. R.Mišeikytė, 41 vid.m-kla, 12 kl. (O.Mačernienė)
2. A.Kaminskas, 7 vid.m-kla, 12 kl. (O.Jablonskienė)
3. V.Danielius, 7 vid.m-kla, 12 kl. (O.Jablonskienė)
4. A.Andrijauskas, 7 vid.m-kla, 12 kl. (O.Jablonskienė)
5. J.Surgailis, 23 vid.m-kla, 10 kl. (J.Mačernis)
6. T.Šalkauskas, 23 vid.m-kla, 10 kl. (J.Mačernis)

Komandos vadovas - mokytojas J.Mačernis.

1988 m. Kauno miesto sustiprinto matematikos mokymo mokyklų komanda:

1. V.Kopustinskas, "Saulės" vid.m-kla, 10 kl. (E.Sadzevičienė)
2. G.Karoblis, "Saulės" vid.m-kla, 11 kl. (J.Mozūraitė)
3. O.Balandis, "Saulės" vid.m-kla, 11 kl. (Z.Repčys)

4. M.Rinkevičius, "Saulės" vid.m-kla, 11 kl. (Z.Repšys)

5. S.Dumša, "Saulės" vid. m-kla, 12 kl. (B.Vosylienė)

6. A.Jocius, "Saulės" vid.m-kla, 12 kl. (B.Vosylienė)

Komandos vadovė - mokytoja B.Vosylienė.

1989 m. Vilniaus miesto sustiprinto matematikos mokymo mokyklų komanda:

1. M.Buta, A.Vienuolio vid.m-kla, 12 kl. (J.Viščiakienė)
2. P.Lyberis, A.Vienuolio vid.m-kla, 12 kl. (J.Viščiakienė)
3. D.Baliukas, A.Vienuolio vid.m-kla, 12 kl. (J.Viščiakienė)
4. G.Voverys, 40 vid.m-kla, 12 kl. (J.Šarkanas)
5. L.Lapkauskaitė, 40 vid.m-kla, 11 kl. (J.Šarkanas)

Komandos vadovas - mokytojas J.Šarkanas.

1990 m. Kauno miesto sustiprinto matematikos mokymo mokyklų komanda:

1. A.Raščius, "Saulės" vid.m-kla, 11 kl.
2. R.Švaplys, "Saulės" vid.m-kla, 11 kl.
3. E.Šmitas, "Saulės" vid.m-kla, 12 kl.
4. V.Kopustinskas, "Saulės" vid.m-kla, 12 kl.
5. E.Keleris, "Saulės" vid.m-kla, 11 kl.

Komandą olimpiadai ruošė mokytoja B.Vosylienė.

Pastaba. Skliausteliuose nurodyta moksleivį ruošusio matematikos mokytojo pavardė. 1986 - 1988 metais komandą sudarė 6 moksleiviai.

I. Baltijos šalių jaunųjų matematikų komandinės olimpiados "Baltijos kelias" rezultatai (Ryga, 1990.11.24-25)

1. Latvija	63
2. Ryga	48
3. Kauno "Saulės" vidurinė mokykla	45
4. Šiauliai	38
5. Estija	31
6. Nyu	16

Pastabos. Kiekvieno uždavinio teisingas sprendimas vertinamas 5 taškais. Premijinių taškų nėra.

Nyu komanda - matematinės mokyklos-internato komanda.

NURODYMAI

I.1. Jei natūralieji skaičiai x, y, z yra šios sistemos sprendiniys, tai $> y$, $x > z$ ir $x^2 < 2(x+x+x)=6x$. Bet x - lyginis skaičius, todėl $x=0$ arba $x=4$.

I.2. Sprendinį užrašykite $x=n+a$, kur $n\in N$, $a\in [0,1)$. Gausite lygtį $2na=[2na+a^2]$. Dešinėje lygties pusėje užrašytas sveikasis skaičius, todėl ir $2na$ - sveikasis skaičius. Taigi $a=k/2n$, $k=0;1;2;\ldots;2n-1$.

I.3. Mėginkite panaudoti keitinį $x-1=t$ ir lygybę

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 = t^2+\frac{1}{t^2}+2.$$

I.4. Palyginkite tarpusavyje $\sqrt{2x-1}$ ir $\sqrt{4x-3}$, $\sqrt{3x-2}$ ir $\sqrt{5x-4}$. Nepamirškite apibrėžimo srities.

I.5. Pamėginkite išreikšti $\sin^4 x$ per dvigubo ir keturgubo argumento trigonometrines funkcijas.

I.6. Suskaičiuokite keli mažesni už 600 natūriniai skaičiai dalijasi iš 7, iš 7^2, iš 7^3 ir t.t.

I.7. Jei natūralusis skaičius n nesidalija iš 3, tai $n=3k\pm1$, $k\in Z$, o $n^2=3(3k^2\pm 2k)+1$. Todėl dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma dalijasi iš 3, tik kai abu jie dalijasi iš 3. Analogiškas teiginys teisingas ir dalumui iš 7.

I.8. Tarkime, $y=\frac{x^4+1}{5x}$, $x\in\left[\frac{1}{5};2\right]$. Parodykite, kad funkcija y atvaizduoja intervalą $\left[\frac{1}{5};2\right]$ į jį patį.

I.9. Jei jokie keturi duotieji taškai nesudaro keturkampio, tai visi duotieji taškai yra vienoje tiesėje išskyrus gal būt vieną. Tada visi jie telpa bet kurio ploto neiškiliajame keturkampyje.

Jei iš duotųjų taškų galima sudaryti keturkampį, tai iš

visų keturkampių su viršūnėmis duotuose taškuose išrinkite didžiausio ploto keturkampį. Galimi du atvejai: 1) šis keturkampis - neiškilasis; 2) iškilasis. Pirmu atveju įrodykite, kad visi duotieji taškai yra trikampyje, kurio viršūnės yra trys to keturkampio viršūnės ir kurio plotas ne didesnis už 3/2. Antruoju atveju per to keturkampio viršūnes išveskite tieses, nekertančias keturkampio ir lygiagrečias įstrižainėms. Įrodykite, kad visi duotieji taškai yra gautame keturkampyje, išskyrus gal būt didžiausio ploto keturkampio kraštinių tęsinių kirtimosi taškus. Jei tie kirtimosi taškai (ar vienas iš jų) yra duotieji taškai, tai įrodykite, kad visi duotieji taškai yra trikampyje, kurio viršūnės yra didžiausio ploto keturkampio viršūnės arba kraštinių tęsinių kirtimosi taškai.

I.10. Tarkime, A - didžiausias trikampio ABC kampas. Iš kraštinių AB ir AC vidurio taškų nuleiskime statmenis į kraštinę BC.

I.11. Įrodykite, kad taškai M, P, Q, N, R yra taisyklingo 10-kampio viršūnės. $\sin 18^\circ$ galima rasti iš lygybės $\sin 3\cdot 18^\circ = \cos 2\cdot 18^\circ$ arba iš 1) lygybės, kurią nesunku įrodyti geometriniu būdu.

I.12. Pamėginkite pradėti analizę ne nuo žaidimo pradžios, o nuo jo pabaigos. Pradedantysis žaidėjas laimi, jei šaškė stovi langeliuose g7, g8, h7, pralaimi, jei - f8, h6, ir t.t.

I.13. Laiko momentu t ($0\le t\le1$) $AX=c(1-t)$, $AY=bt$. Atstumą d tarp taškų X ir Y galima apskaičiuoti iš kosinusų teoremos:

$$d^2 = c^2(1-t)^2 + b^2t^2 - 2bct(1-t)\cos A.$$

Raskite šio kvadratinio trinario (t atžvilgiu) mažiausią reikšmę atkarpoje $[0;1]$.

I.14. Pažymėkite, $\alpha_k = \sin a_k$, $k = 1,2,3,4$. Tada $\cos 2a_k = 1-2\alpha_k$, $\sum \alpha_k = 1$, $\sum \alpha_k^2 \leqslant 1/3$. Tarkime, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \alpha_4$. Jei $\alpha_4 < 0$, tai $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1-\alpha_4 > 1$. Todėl

$$\frac{1}{3} \geqslant \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2 > \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 \geqslant \frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 > \frac{1}{3}.$$

(Taikėme nelygybę $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$.)

Gavome prieštarą. Todėl $\alpha_k \geqslant 0$, $k=1,2,3,4$. Nelygybei $\sin a_k \leqslant \frac{1}{2}$, $k=1,2,3,4$ įrodyti nagrinėkite skaičius $\beta_k = \frac{1}{2} - \alpha_k$, $k=1,2,3,4$.

I.16. Panaudokite kalkuliatorių.

I.17. Ištirkite, kaip gali būti nuspalvintos viršūnės rombo, kurio visos kraštinės ir viena įstrižainė lygi 1. Sukite rombą apie smailiojo kampo viršūnę.

I.18. Tarkime, lentoje yra m juodų langelių. Nagrinėkite, kaip gali keistis skaičius m po vienos vertikalės (horizontalės) perdažymo.

I.19. Remkitės teiginiu: tiesė, einanti per trapecijos šoninių kraštinių tęsinių kirtimosi tašką ir įstrižainių kirtimosi tašką dalija pagrindus pusiau.

I.20. Nagrinėkite lygiaplotes figūras.

II.1. Pažymėkite $ab=x$. Tada $abc=10x-c$.

II.2. Taikykite lygybę

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} =$$

$$= \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$$

ir nelygybes

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geqslant \frac{1}{3}(a+b),\ \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} \geqslant \frac{1}{3}(b+c),\ \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{1}{3}(c+a).$$

II.3. Parodykite, kad taškai A,B,C ir P yra stačiakampio viršūnės.

II.4. Remkitės tuo, kad abiejų šoninių trikampių plotai lygūs, o kiti du trikampiai yra panašūs.

II.5. Nagrinėkite "labai smailą" ir "labai buką" trikampius.

II.6. Pažymėkite $x=n+a$, $n \in N$, $a \in [0;1)$ ir išnagrinėkite du atvejus: 1) $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$; 2) $a \in \left[\frac{1}{2},1\right)$.

II.7. Raskite tokį natūralųjį skaičių n, kad trupmeną būtų galima suprastinti iš 10^n+1.

II.8. Nudažytus kubelius galima suskirstyti į tris grupes pagal nudažytų sienų skaičių. Suskaičiuokite, kiek yra kubelių kiekvienoje grupėje ir kiek jų reikia tuščiaviduriui kubui.

II.9. Didžiausias tokio n-kampio kampas negali būti didesnis už $150°$ $(=180°-30°)$. Pamėginkite sudėti iš 12 stačiųjų trikampių 12-kampį, kurio visi kampai lygūs $150°$ (trikampiai nebūtinai turi būti lygūs).

II.10. $2p=n^3-1$. Palyginkite lygybės kairės ir dešinės pusių skaidinius daugikliais.

II.11. Iš antrosios ir trečiosios nelygybių išplaukia, kad $x \leqslant \min(0;a)$, $y \leqslant \min(0;b)$. Todėl $x^2 \geqslant ax$, $y^2 \geqslant by$.

II.12. Pažymėkite $y = (x^2-1)/2$. Tada iš lygties gauname, kad $2y$ yra sveikasis skaičius. Taigi $y = n$, arba $y = n+1/2$, $n \in Z$.

II.13. Sakykime, kad tai yra skaičiai $k, k+1, \ldots, k+2n$. Tada $k^2+(k+n+1)^2-(k+1)^2+ \ldots +(k+2n)^2-(k+n)^2$. Išspręskite šią kvadratinę k atžvilgiu lygtį.

II.14. Pamėginkite kiekvieną tuščiavidurio kubo vienetinį kubelį nuspalvinti juodai ar baltai taip, kad turintys bendrą sieną kubeliai būtų nudažyti skirtingomis spalvomis. Suskaičiuokite, kiek kubelių nudažyta viena, o kiek – kita spalva.

II.15. Mėginkite įrodyti, kad nelyginė funkcija $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{4}$ didėja, kai $x > 0$ ir $f(0)=0$.

II.16. Sakykime, M – taškas stačiakampio ABCD viduje ar jo išorėje. Įrodykite, kad $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

II.17. Raskite atstumus tarp plokštumos taškų $(0;b)$, $(0;c)$, $(a;0)$.

II.18. Panagrinėkite funkcijų f ir g reikšmes taškuose

$$(x;y) = (0;0);(-1;-1);(0;-1);(-1;0).$$

II.19. $|5a+3b| = |5a+5b-2b| \leqslant 5|a+b| + 2|b| = 5f(1)+2f(0) \leqslant 7$. Sugalvokite pavyzdį su didžiausia reikšme, lygia 7.

II.20. $2^n+1 = (3-1)^n+1 = 3m+(-1)^n-1$, $m \in N$.

III.1. Jei visi šie skaičiai skirtingi ir $n_1 < n_2 < \ldots < n_{100}$, tai $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 2, \ldots, n_{100} \geqslant 100$. Pamėginkite įvertinti sumą

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100}}.$$

Panaudokite nelygybę

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}),\ n \in N.$$

III.3. Jei $[x] = [y]$, tai $|x-y| < 1$. Prisiminkite I.2 uždavinio nurodymus.

III.4. Remkitės vidurkių nelygybėmis:

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant (x+y+z)/3 \leqslant \sqrt{(x^2+y^2+z^2)/3},\ x,y,z \geqslant 0.$$

III.5. $3 \cdot 4 = 12$, $33 \cdot 34 = 1122$, ... Apibendrinkite ir įrodykite.

III.6. Atstumas nuo apskritimo centro iki keturkampio kraštinės yra lygus pusei priešingos kraštinės. Įrodykite (pamėginkite rasti lygius trikampius).

III.7. Patikrinkite, ar $a_1 \in N$, $a_2 \in N$. Įrodykite, kad $a_{n+1} = a_n \cdot a_1 - a_{n-1}$, $n = 2,3,\ldots$. Plotą apskaičiuokite pagal Herono formulę.

III.8. Nagrinėkite atvejus: a) visos atkarpos yra vienoje tiesėje; b) dvi atkarpos nėra vienoje tiesėje.

III.9. Įrodykite, kad trijų dalių (į kurias daugiakampį dalija visos trys tiesės) plotai didesni už tiesėmis apriboto trikampio plotą.

III.10. Apskaičiuokite $xy+yz+zx$ ir panaudokite Vijeto teoremą trečio laipsnio algebrinei lygčiai.

III.11. Sujunkite taškus į trikampį. Kiekviena tokia tiesė eina per trikampio vidurio liniją.

III.12. Jei p ir $2p+1$ pirminiai skaičiai, tai $p=3n-1$, $n \in N$. Bet tada $4p+1=3(4n-1)$.

III.13. $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, $n \in N$. Pažymėkime duotą sandaugą A. Tada

$$A^2 = A \cdot A < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \ldots \frac{99}{100}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}.$$ Kairiąją

nelygybę įrodykite analogiškai.

III.14. Pasižymėkite $a = \sin\alpha$, $c = \sin\beta$.

III.15. Nagrinėkite svėrimų 1+2 ir 3 bei 2+3 ir 5 galimus rezultatus. Gal galite nustatyti, ar netikroji moneta yra sunkesnė (lengvesnė) nei turi būti?

III.16. $P(-2)=0$, $P(0)=0$. Todėl ieškomasis daugianaris turi dalintis iš $x(x+2)$. Pažymėkite $P(x)/(x(x+2))=Q(x)$. Kokią lygtį tenkina daugianaris Q?

III.17. Vienas toks taškas yra įstrižainės BD vidurio taškas.

III.18. Duotas skaičius dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9. Panaudokite I.7 uždavinio nurodymus.

III.19. Nagrinėkite, kaip kinta užrašytų nelyginių skaičių kiekis.

III.20. Kai $x \geqslant 3$, tai $x^3 < x^3+9x+2 < (x+1)^3$. Kai $x < -1$, tai $(x-1)^3 < x^3+9x+2 < x^3$. Todėl tada x^3+9x+2 negali būti sveiko skaičiaus kubas. Liko išnagrinėti atvejus $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$.

IV.1. Nesunku rasti sistemos sprendinius $(0;0;0)$, $(1;1;1)$ ir $(-1;-1;-1)$. Įrodykite, kad daugiau sprendinių nėra ($xyz \neq 0$, $|x|<1$ $|y|<|x|$ $|z|<|y|$ $|x|<|z|$).

IV.2. Remiantis vidurkių nelygybe (žr.III.4.):

$$2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 \geqslant 3\sqrt[3]{2^{x^5} \cdot 2^{2x^4} \cdot 2^{32}} \geqslant 3 \cdot 2^{\sqrt[3]{x^5 \cdot 2x^4 \cdot 32}} = 3 \cdot 16^{x^3}.$$

IV.3. $2^x = y^2 - 4$. Išskaidykite abi lygties puses daugikliais ir pamėginkite juos sulyginti.

IV.4. Raskite lygčių $x^2+y^2=z^2$, $2x^2+y^2=z^2$ po vieną natūralųjį sprendinį. Įrodykite, kad sprendinių šios lygtys turi be galo daug. Nagrinėkite lygtis $(2^k x)^2+y^2=z^2$, $2(2^k x)^2+y^2=z^2$.

IV.5. $a+\sqrt{x} = a^2-2ax+x^2$. Mėginkite šią lygtį išspręsti kintamojo a atžvilgiu.

IV.6. Raskite su kuriomis reikšmėmis egzistuoja tokie x ir y. Galite panaudoti atvirkštinę Vijetos teoremą.

IV.7.
$$\frac{1+abc}{a(1+b)}+1 = \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b},$$
$$\frac{1+abc}{b(1+c)}+1 = \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c},$$
$$\frac{1+abc}{c(1+a)}+1 = \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a}.$$

Sudėkite šias nelygybes ir panaudokite nelygybę $A+1/A \geqslant 2$, kai $A > 0$.

IV.8. Kiekvienas natūralusis skaičius ne mažesnis už savo skaitmenų sandaugą. Todėl $n^2-10n-22 \leqslant n$. Kiek natūralinių sprendinių turi ši nelygybė?

IV.9. Pagal vidurkių nelygybę

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{-1} + (\sin\tfrac{\beta}{2})^{-1} + (\sin\tfrac{\gamma}{2})^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant 3(\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2})^{-1/3}.$$

Iš kosinusų teoremos

$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha = (b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Todėl $\sin^2\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a^2}{4bc}$, arba $(\sin\frac{\alpha}{2})^{-1} > \frac{2\sqrt{bc}}{a}$.

Analogiškai įvertinkite $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$.

IV.10. Pamėginkite kiekvieną lygybę pakelti kvadratu ir po to visas sudėti.

IV.11. Mėginkite įrodinėti prieštaros būdu. Jei trys komandos nariai nemiegojo kartu, tai susidaro 10 nesikertančių tarpusavyje laiko intervalų, kada miegojo skirtingos jaunųjų matematikų poros. Pirmajame intervale pažymėkime abu miegančiuosius, likusiuose - bent po vieną, tik pradėjusį miegoti tuo metu. Kiek moksleivių pažymėsime? Ar gali kiekvienas iš jų turėti tik po dvi žymes?

IV.12. Mėginkite nagrinėti buką trikampį su viena santykinai trumpa kraštine.

IV.13. Parodykite, kad keturiais tokiais lygiakraščiais trikampiais galima pilnai uždengti kvadratą. Nagrinėkite atvejį, kai viena trikampio kraštinė yra kvadrato kraštinėje ar jos tęsinyje, o kita eina per kvadrato centrą.

IV.14. Nagrinėkite atvejį: keturi taškai yra šoninėse stačiakampio kraštinėse, du - atkarpoje, jungiančioje likusių kraštinių vidurio taškus.

IV.15. Susidariusių trikampių vidaus kampų suma lygi 180°. Pasižymėkite kampus, parašykite atitinkamas lygybes.

IV.16. Kiekviena kubo siena turi būti padalyta. Be to, ne daugiau kaip trys piramidės sienos gali būti kubo sienų dalys. Jei kubą galima būtų padalyti į 4 piramides, tai kiekvienos piramidės trys sienos būtų kubo sienų dalys, o tūris būtų ne didesnis už 1/6 kubo tūrio. Ar galima kubą padalyti į penkias trikampes piramides?

IV.17. $k^n - b^n$ dalijasi iš k-b. Todėl su visomis k reikšmėmis $a-b^n = k^n - b^n - (k^n - a)$ turi dalintis iš k-b.

IV.18. Pažymėkite $\lambda = \min(x; \frac{1}{y}; y+\frac{1}{x})$. Tada $\lambda \leq x$, $\lambda \leq 1/y$, $\lambda \leq y+1/x$ ir $\lambda \leq y+1/x \leq 2/\lambda$. Gauname $\lambda^2 \leq 2$. Ar gali būti $\lambda = \sqrt{2}$?

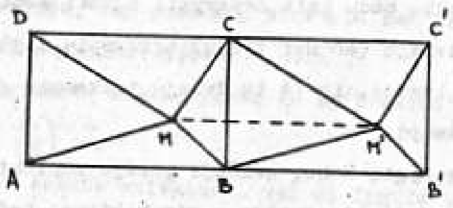
IV.19. Mėginkite pasinaudoti dalumo iš 2 trejetainėje skaičiavimo sistemoje požymiu (lyginkite su dalumo iš 9 dešimtainėje skaičiavimo sistemoje požymiu, nes 3-1=2, 10-1=9).

IV.20. Parodykite, kad an^2+bn+c, $n \in Z$ negali būti lyginis skaičius.

V.1. Jei x_1, x_2 yra sveikosios lygties šaknys, tai $x_1+x_2=a$, $x_1 \cdot x_2 = 5a$. Todėl $5(x_1+x_2) = x_1x_2$, $(x_1-5)(x_2-5) = 25$ ir reiškinys x_1-5 gali būti lygus tik $\pm1, \pm5, \pm25$.

V.2. Tarkime $m \leq n \leq k$. Nagrinėkite atvejus $m=1$, $m=2$, $m \geq 3$.

V.3.



Keturkampio BM'CM įstrižainės tarpusavyje statmenos, apie jį galima apibrėžti apskritimą.

V.4. Jei jau sudarytas kvadratas kxk, tai nesunku gauti ir kvadratą (k+6)x(k+6). Pamėginkite sudėti kvadratus 6x6, 8x8, 9x9, 10x10, 11x11, 13x13.

V.5. Koordinačių pradžios tašką O sujunkite su visais taškais, kurių koordinatės - sveikieji skaičiai ir kurių atstumas iki taško O mažesnis už 5. Daugiakampio kraštinė turi būti lygiagreti vienai iš gautųjų atkarpų.

V.6. Tarkime, liestinės nesikerta viename taške. Tada yra trys jų tarpusavio susikirtimo taškai. Kuris iš jų yra arčiausiai liestinių sąlyčio su apskritimais taškų?

V.7. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{x} - \frac{1}{x}$ didėja intervale $(2, \infty)$. Bet $f(4) = -1/4 < 0$, o $f(5) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{5} > 0$. Įvertinkite $f(5)$.

V.8. Šiaip jau iš konkrečių trijų trikampių sudėti (žinoma, neiškiliuosius) daugiakampius nesunku. Tačiau bendras atvejis reikalauja kruopščios analizės. (Kas bus, jei trikampiai persidengs? O gal daugiakampio vidaus kampas bus lygus 180°, ar sutaps dvi trikampių viršūnės, kurios turėtų būti skirtingos.) Bandykite taip dėti trikampius, kad didžiausios jų kraštinės būtų vienoje tiesėje. Jokiu būdu gali nepavykti sudėti septynkampio. Bet tada dviejų (ar net trijų) trikampių didžiausios kraštinės lygios, ir iš tų dviejų trikampių galima sudėti keturkampį.

V.9. Pakėlę lygtį kubu, kairėje pusėje surinkite narius su $\sqrt{5}$, o dešinėje pusėje – visus kitus. Kadangi $\sqrt{5}$ – iracionalus skaičius, tai abi gautos lygties pusės lygios nuliui. Bet tada teisinga lygybė $x - y\sqrt{5} = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Iš čia

$$x = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})/2.$$

Pažymėję $z = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ir pakėlę šią lygybę kubu, gausime lygtį $z^3 = 4 - 3z$. Išspręskite ją.

V.10. Raskite visus sferos taškus su sveikosiomis koordinatėmis. Kiek viršūnių yra plokštumoje, kurios lygtis $x+y+z=7$? Kuriuose taškuose ši plokštuma kerta koordinačių ašis?

V.11. Nelygybės $a_{n+1} > a_n$ sprendinių aibė yra (-n+1;-n) $((1+n)/(4n+3); \infty)$. Reikia rasti tuos x, kurie tenkina nelygybę $a_{n+1} > a_n$ su visais natūraliaisiais n.

V.12. Tarkime, $a = \sqrt{2}$, $b = 2\log_2 3$. Ar skaičius $2\log_2 3$ yra iracionalus?

V.13. $6x^2+17xy+12y^2+x+y = (2x+3y)(3x+4y+\frac{1}{3}) + \frac{x}{3}$. Kokias reikšmes įgyja šis reiškinys, kai $2x+3y=0$?

V.14. Sąlyga ekvivalenti lygybei $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$. Todėl seka yra geometrinė progresija.

V.15. Pirmiausia pamėginkite tokios funkcijos ieškoti tarp tiesinių funkcijų $f(x) = ax+b$.

V.16. Įrodykite, kad visų trijų apskritimų spinduliai yra lygūs.

V.17. Akivaizdu, kad $\cos x \geq 0$, $\sin x \geq 0$. Bet tada

$$\sin x \leq \sqrt{\sin x} \leq \sqrt{\sin x + \cos x}.$$

Palyginkite šią nelygybę su apibrėžimo sritimi.

V.18. $x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$. Viena šaknis akivaizdi. Gal ši lygtis turi ir daugiau šaknų? Tirkite funkciją $f(x) = x^x$.

V.19. Pasinaudokite nelygybe

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2).$$

V.20. Jei, sakykime, $\overline{abcd}$ ieškomasis skaičius, tai jo skaitmenų suma lygi skaičiaus $\overline{abcd} \cdot 1001 = \overline{abcd000} - \overline{abcd}$ skaitmenų sumai. Iš čia $\overline{abcd} = 9999$. Ir atvirkščiai, jei $\overline{xyzu} \leq 9999$, tai skaičiaus $9999 \cdot \overline{xyzu}$ skaitmenų suma lygi skaičiaus 9999 skaitmenų sumai.

Bet $S > 20 \cdot 101$. Prieštara.

B.19. Iš sąlygos išplaukia, kad negali sutapti ir didžiausieji, ir mažiausieji skirtingų poaibių skaičiai. Kai kiekvienas poaibis sudarytas iš paeiliui einančių skaičių, tai yra toks skaičius k, kuris priklauso visiems poaibiams. Bet tada tokių poaibių, kuriems priklauso k, skaičius ne didesnis už $(k+1)(2n+1-k) \leq (n+1)^2$.

ATSAKYMAI

I.1. $(4;1;3)$; $(4;3;1)$; $(4;2;2)$.

I.2. $1985 \cdot 1986 - 1$.

I.3. Su visais $a > 0$ lygtis turi sprendinius $(1-\sqrt{1+a^2} \pm \sqrt{a^2+2\sqrt{1+a^2}-2})/2$. Kai $0 < a < 2\sqrt{2}$, yra tik šie du sprendiniai. Kai $a > 2\sqrt{2}$, tai yra dar du sprendiniai $(1+\sqrt{1+a^2} \pm \sqrt{a^2-2\sqrt{1+a^2}-2})/2$. Kai $a = 2\sqrt{2}$, tai yra sprendiniai $-1 \pm \sqrt{3}$, 2.

I.4. $(1;\infty)$.

I.5. $2^{-1}(1-\cos 2\alpha) - 2^{-2n-3}(1-\cos 2^{n+2}\alpha)$.

I.6. Ne, nėra.

I.11. Teisingos visos lygybės.

I.12. Taip, gali.

I.13. Pažymėkime $t = (c^2 + bc\cos A)/(c^2+b^2+2bc\cos A)$. Jei $t \leq 0$, tai trumpiausias atstumas lygus b; jei $0 \leq t \leq 1$, tai $(bc\sin A)/(\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A})$; jei $t \geq 1$, tai c.

I.15. Mokyklą galima statyti tarp miestelių A ir B arba juose.

I.16. $144400 = 380^2$; $225625 = 474^2$; $324900 = 570^2$.

I.18. a) Galima. b) Negalima.

II.1. 100; 121; 144; 169.

II.5. Nebūtinai. Tokio pačio ilgio šoninės kraštinės ir įbrėžtojo apskritimo spindulį gali turėti smailusis ir bukasis trikampiai.

II.6. 1986.

II.7. $79/7$.

II.8. $n \geq 2$, $n \in N$.

II.9. 12.

II.10. 13.

II.11. (0;0), kai $a \geqslant 0$ ir $b \geqslant 0$. (a;0), kai $a < 0$ ir $b \geqslant 0$.
(0;b), kai $a \geqslant 0$ ir $b < 0$. (a;b), kai $a < 0$ ir $b < 0$.

II.12. 0; 1; -1.

II.13. $2n^2+n$, $2n^2+n+1, \ldots, 2n^2+3n$.

II.14. Negalima.

II.15. $(0,\infty)$.

II.16. $\sqrt{6}$; $\sqrt{12}$.

II.18. Neegzistuoja.

II.19. 7.

II.20. $n=2k$, $k \in N$.

III.2. $(-\infty;\ (1+\sqrt{1-4a})/(2a)) \cup (0;\ (1-\sqrt{1-4a})/(2a))$, kai
$a < 0$;
$(0;1)$, kai $a=0$;
$(0;(1-\sqrt{1-4a})/(2a)) \cup ((1+\sqrt{1-4a})/(2a), \infty)$, kai $0 < a \leqslant 1/4$;
$(0;\infty)$, kai $a > 1/4$.

III.3. $(0;1) \cup (1+\sqrt{2};1+\sqrt{3})$.

III.5. 33...3·33...34 (abu skaičiai 1988-ženkliai).

III.10. (5;8;11); (8;11;5); (11;5;8);
(5;11;8); (11;8;5); (8;5;11).

III.11. 3.

III.16. $P(x) = Cx(x+2)$.

III.17. Atkarpa keturkampio viduje, lygiagreti įstrižainei AC ir einanti per įstrižainės BD vidurio tašką.

III.18. Negalima.

III.19. Negali.

III.20. -1.

IV.1. (0;0;0); (1;1;1); (-1;-1;-1).

IV.2. 2.

IV.3. (5;6).

IV.5. 0, kai $a=0$; $(2a-1-\sqrt{4a-3})/2$, kai $a \geqslant 1$.

IV.6. 18.

IV.8. 12.

IV.12. Neteisingas. (Teiginys teisingas, kai trikampio vidurinysis kampas ne mažesnis už 30°).

IV.14. Galima.

IV.16. 5.

IV.18. $\sqrt{2}$.

IV.19. $364 = 111111_3$.

IV.20. Negali.

V.1. -16; 0; 20; 36.

V.2. 41/42.

V.3. 90°.

V.5. 40.

V.7. $\emptyset$.

V.9. (1/2;1/2).

V.10. 32; 8 sienos - šešiakampiai (po vieną kiekviename oktante) ir 24 sienos - trikampiai (kiekvienoje viršūnėje, esančioje koordinačių ašyse, kertasi po 4 trikampes sienas).

V.11. Griežtai didėja, kai $x \in (2/7;\ )$; mažėja, kai $x \in (-1;1/4)$.

V.12. $\sqrt{2}$; $2\log_2 3$.

V.13. Taip. Reiškinio reikšmė gali būti bet kuris sveikasis skaičius.

V.14. 3^{1989}; 2^{-1988}.

V.15. Pavyzdžiui, $f(x) = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2} - 1$.

V.17. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

V.18. 1/2; 1/4.

V.20. 9; 99; 999; ...

B.1. 2n-2.

B.2. $((m+n)^2-3m-n+2)/2$.

B.3. Taip, gali būti.

B.5. Pavyzdžiui, a∗(a∗a) = (a∗a)∗a. Ji neteisinga su operacija a∗b = 2a+b.

B.9. Ne, nebūtinai.

B.10. Taškas A nuo jo pradinės padėties gali būti pastumtas kiek norima toli.

B.14. Taip, egzistuoja. Pavyzdžiui, 1990! + 1, 1990!·2 + 1, ..., 1990!·1990+1.

B.17. Pradedantysis.

B.19. $(n+1)^2$.

1st LITHUANIAN TEAM CONTEST OF YOUNG MATHEMATICIANS (1986)

I.1. Determine all solutions in positive integers of the system of equations

$$x^3-y^3-z^3 = 3xyz;\quad x^2 = 2(x+y+z).$$

I.2. Find the number of solutions of the equation

$$(x-[x])^2 = x^2-[x]^2,$$

which are in the interval (1;1986).

($[x]$ denotes the integer part of the number x).

I.3. Solve the equation

$$x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = a^2, \quad a>0.$$

I.4. Solve the inequality

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}.$$

I.5. Sum the finite series

$$S = \sin^4\alpha + \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \dots + \frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha.$$

I.6. Is $\frac{600!}{7^{99}}$ an integer number?

I.7. Prove that if the sum of the squares of two integers is divisible by 21 then it is divisible by 441.

I.8. The sequence $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ is defined in the following way

$$x_1=2,\quad x_{n+1}=\frac{x_n^4+1}{5x_n},\quad n=1,2,\dots$$

Prove that $\frac{1}{5} < x_n \leq 2$ for all n.

I.9. Given n (n > 4) points in the plane. Suppose that the area of any quadrangle with vertices in these points does'nt exceed 1. Prove that there exists a quadrangle with area