Vilniaus universitetas

Artūras Dubickas

XII IR XIII LIETUVOS KOMANDINĖS MATEMATIKOS OLIMPIADOS

Vilniaus universiteto leidykla
1999

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto
Matematikos fakulteto taryba (1999 02 02, protokolo Nr. 4)

Recenzavo: dr. Ramūnas Garunkštis

A r t ū r a s   D u b i c k a s
XII IR XIII LIETUVOS KOMANDINĖS MATEMATIKOS OLIMPIADOS

Redaktorė *Zita Manstavičienė*
Viršelio dailininkas *Gediminas Markauskas*

1999 02 04. 1,3 leidyb. apsk. l. Užsakymas 18
Išleido Vilniaus universiteto leidykla
Rinko ir maketavo *Vita Verikaitė*
Spausdino VU spaustuvė. S. Skapo g. 7, 2734 Vilnius

Turinys

XII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1997 09 20

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS. Leidyklos TEV ir ALMA LITTERA.

Organizacinis komitetas: R. Kašuba (pirmininkas), A. Dubickas.

Vertinimo komisija: A. Dubickas (pirmininkas), G. Alkauskas, M. Bloznelis, R. Eidukevičius, R. Garunkštis, S. Grigelionis, A. Kačėnas, R. Kašuba, K. Liubinskas, V. Mackevičius, A. Mačiulis, J. Mačys, H. Markšaitis, A. Plikusas, G. Puriuškis, V. Stakėnas, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta ir profesoriaus Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **Kauno technologijos universiteto gimnazijos komandai**.

Antroji vieta – **Tauragės komandai**.

Trečioji vieta – **Panevėžio pirmajai komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
VU MaF	5	-	8	2	5	-	5	8	5	6	6	0	1	-	5	2	7	7	8	3	83	–
KTU	0	-	-	-	1	7	0	-	5	6	6	0	1	-	5	4	2	7	0	1	45	1
Tauragės	5	-	-	-	5	7	-	0	-	-	-	-	-	-	5	4	0	-	1	2	29	2
Panevėžio I	5	-	1	-	5	0	-	0	2	-	-	0	8	-	3	2	1	-	-	0	27	3
Vilniaus lic. *	-	-	-	-	5	-	5	0	0	-	-	0	1	-	0	4	7	-	1	1	24	4
Vilniaus	-	-	0	-	-	-	-	-	5	6	6	0	-	-	5	0	0	-	-	-	22	5-6
Kauno „Saulė“	5	-	1	2	0	0	0	-	5	0	2	0	-	-	4	1	1	-	-	1	22	5-6
Visagino I	5	-	-	-	5	-	5	-	-	-	0	0	-	-	0	1	3	-	2	-	21	7
Kretingos	0	4	0	-	5	-	5	0	-	-	1	-	1	-	0	-	3	0	-	-	19	8
Šiaulių	0	-	-	-	5	0	-	-	5	-	4	-	-	-	0	0	0	-	0	1	15	9
Panevėžio II	0	-	1	-	5	0	-	0	0	0	-	-	-	-	3	1	2	-	0	-	12	10
Mažeikių	0	-	1	-	5	0	-	0	0	-	-	-	-	-	3	-	1	-	-	-	10	11
Visagino II	-	-	1	-	-	0	-	-	5	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	1	7	12
Kėdainių	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13

* Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus.

Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto pirmakursių komanda dalyvavo be konkurso.

Išsamus kiekvieno uždavinio sprendimas buvo vertinamas 5 balais. Be to, uždavinį teisingai išsprendus tik vienai komandai jai buvo pridedami 3 balai, dviem komandoms – po 2 balus, trim komandoms – po 1 balą.

Uždavinių sąlygos

1. Raskite visus tokius a, su kuriais lygtis $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ turi keturias realiąsias aritmetinę progresiją sudarančias šaknis.

2. Įrodykite, koks bebūtų natūralusis skaičius m, visada atsiras toks natūralusis neturintis nulių savo dešimtainiame skleidinyje skaičius n, kurio skaitmenų suma yra lygi skaičiaus mn skaitmenų sumai.

3. Ar atsiras nors vienas natūralusis n, kad $1997^n - 1$ baigtųsi 1997 nuliais?

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin(x+2y), \\ 3\sin(2x+y) = -\cos 3y. \end{cases}$$

5. Ar koks nors pirminis skaičius yra lygus pirminių skaičių penktųjų laipsnių skirtumui?

6. Yra žinoma, kad vienodą matematinės analizės ir algebros egzamino pažymį gavusių studentų procentas yra tarp 9,8% ir 9,9%, o gavusiųjų geresnįjį algebros pažymį procentas yra tarp 50% ir 50,9%. Koks galėtų būti pats mažiausias matematiką studijuojančių studentų skaičius?

7. Teigiamieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą $a^2 + b^2 + c^2 = 7/4$. Įrodykite, kad tada

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

8. Lentoje parašyti skaičiai $\sqrt{2}$, 2 ir $1/\sqrt{2}$. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du iš jų ir užrašyti iš $\sqrt{2}$ padalytą jų sumą ir skirtumą. Ar taip darant galima gauti skaičių 1, $\sqrt{2}$ ir $1+\sqrt{2}$ trejetą.

9. Trapecijos pagrindai yra 16 ir 6, ir į ją yra įbrėžtas apskritimas. Ar to apskritimo skersmuo galėtų būti lygus 10?

10. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC yra paimti tokie taškai N ir M, kad $\frac{AN}{CN} = 3$ bei $\frac{BM}{CM} = 2$. Žinoma, kad O yra tiesių AM ir BN sankirtos taškas. Raskite $\frac{AO}{MO}$.

11. Kvadratas, kurio įstrižainės ilgis yra lygus a, padalytas į m stačiakampių su įstrižainių ilgiais $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Įrodykite, kad $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 \geqslant a^2$.

12. Ar funkcija $f(x) = \sin x + \cos(x^2)$ yra periodinė?

13. Raskite visus tokius realiuosius a ir b, kad su visais x būtų teisinga lygybė

$$ae^x + b = e^{ax+b}.$$

14. Įrodykite, kad su visais realiaisiais x ir su visais natūraliaisiais n yra teisinga nelygybė

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x| > \frac{n}{3}.$$

15. Su kokiu mažiausiu natūraliuoju n visos trupmenos

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \ldots, \frac{31}{n+33}$$

yra nesuprastinamos?

16. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{[-7x^2 + 3x + 4]} = [2 - \sin x]$$

($[x]$ yra žymimas pats didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis x).

17. Sveikieji skaičiai x ir y tenkina sąlygą $4x + 5y = 7$. Kokią pačią mažiausią reikšmę įgyja reiškinys $5|x| - 3|y|$?

18. Suraskite nors vieną lygties $x^3 + y^5 = z^4$ natūralųjį sprendinį. Įrodykite, kad tokių sprendinių lygtis turi be galo daug.

19. Ar skaičius $500\ldots02$ galėtų būti keleto iš eilės einančių skaičių kubų suma?

20. Kokią pačią didžiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_{1997},$$

jeigu yra žinoma, kad

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \ldots \operatorname{tg} \alpha_{1997} = 1\,?$$

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Pažymėkime $y = x^4$. Turime lygtį $y^2 + ay + 1 = 0$. Tarkime, kad ji turi dvi teigiamas šaknis y_1 ir y_2, čia $y_1 < y_2$. Aišku, kad tik tada lygtis $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ turi keturias *skirtingas* realiąsias šaknis $-\sqrt[4]{y_2}$, $-\sqrt[4]{y_1}$, $\sqrt[4]{y_1}$, $\sqrt[4]{y_2}$. Jos sudaro aritmetinę progresiją tada ir tik tada, kai $\sqrt[4]{y_2} = 3\sqrt[4]{y_1}$, t.y. $y_2 = 81y_1$. Kita vertus, pagal Vijeto teoremą

$$\begin{cases} y_1 y_2 = 1, \\ y_1 + y_2 = -a. \end{cases}$$

Taigi $81y_1^2 = 1$, t.y. $y_1 = 1/9$. Vadinasi, $y_2 = 9$, o $a = -y_1 - y_2 = -82/9$. Kadangi su šia a reikšme lygties $y^2 + ay + 1 = 0$ diskriminantas $a^2 - 4$ yra teigiamas, tai ši lygtis turi dvi skirtingas teigiamas šaknis, t.y. ši a reikšmė tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $a = -82/9$.

2. Skaičiaus m paskutinį skaitmenį galime laikyti nelygiu nuliui, t.y.

$$m = \overline{m_1 m_2 \ldots m_{q-1} m_q}, \quad m_q \neq 0.$$

Imkime

$$n = \underbrace{\overline{99\ldots99}}_{q} = 10^q - 1.$$

Tada

$$\begin{aligned} mn &= m(10^q - 1) = 10^q m - m \\ &= \overline{m_1 m_2 \ldots m_q \underbrace{0\ldots0}_{q}} - \overline{m_1 m_2 \ldots m_q} \\ &= \overline{m_1 \ldots m_{q-1}(m_q - 1)(9 - m_1)\ldots(9 - m_{q-1})(10 - m_q)}. \end{aligned}$$

Taigi skaičiaus mn skaitmenų suma lygi

$$m_1+\ldots+m_{q-1}+m_q-1+9-m_1+\ldots+9-m_{q-1}+10-m_q=9q,$$

t.y. lygi skaičiaus n skaitmenų sumai.

3. *1 būdas.* Skaičiai 1997^k, $k=1,2,\ldots,10^{1997}$, nesidalija iš 10^{1997}. Todėl bent dviejų iš jų 1997^m ir 1997^r, $1\leqslant m<r\leqslant 10^{1997}$, liekanos vienodos. Jų skirtumas

$$1997^r-1997^m=1997^m\bigl(1997^{r-m}-1\bigr)$$

dalijasi iš 10^{1997}, taigi $1997^{r-m}-1$ dalijasi iš 10^{1997}, todėl baigiasi 1997 nuliais.

2 būdas. Pagal Oilerio teoremą $a^{\varphi(m)}-1$ dalijasi iš m, jei $(a,m)=1$. Tegul $a=1997$, o $m=10^{1997}$. Tada gauname, kad skaičius

$$1997^{\varphi(10^{1997})}-1=1997^{4\cdot 10^{1996}}-1$$

dalijasi iš 10^{1997}, todėl jis baigiasi 1997 nuliais.

4. Sudauginame kairiąsias puses su dešiniosiomis. Tada

$$\begin{aligned}0&=\cos 3x\ \cos 3y+\sin(x+2y)\ \sin(2x+y)\\&=\frac12\bigl(\cos(3x+3y)+\cos(3x-3y)\\&+\cos(x-y)-\cos(3x+3y)\bigr)\\&=\frac12\bigl(\cos(3x-3y)+\cos(x-y)\bigr)=\cos(x-y)\ \cos(2x-2y),\end{aligned}$$

taigi $\cos(x-y)=0$ arba $\cos(2x-2y)=0$.

Pirmuoju atveju $x=y+\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Iš antrosios lygties gauname

$$3\ \sin(2x+y)=3\ \sin(3y+\pi+2\pi k)=-3\ \sin 3y=-\cos 3y,$$

$$\operatorname{tg} 3y=1/3.$$

Taigi

$$y = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3},$$

$$x = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{3} + \pi k, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Antruoju atveju $2x = 2y + \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada iš antrosios lygties gauname

$$-\cos 3y = 3\,\sin(2x + y) = 3\,\sin(3y + \pi/2 + \pi k)$$
$$= 3(-1)^k\,\sin(3y + \pi/2) = 3(-1)^{k+1}\cos 3y,$$

t.y. $\cos 3y = 0$. Iš pirmosios lygties gauname

$$3\,\cos 3x = \sin(x + 2y) = \sin(3x - \pi/2 - \pi k) = (-1)^{k+1}\,\cos 3x,$$

t.y. $\cos 3x = 0$. Todėl

$$\sin(3x - 3y) = \sin 3x\,\cos 3y - \sin 3y\,\cos 3x = 0,$$

t.y. $3x - 3y = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Vadinasi,

$$2\pi l = 6x - 6y = 3(\pi/2 + \pi k) = 3\pi/2 + 3\pi k.$$

Taigi $4l - 6k = 3$, tačiau čia kairiojoje pusėje yra lyginis skaičius, o dešiniojoje – nelyginis. Prieštara.

Atsakymas: $x = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{3} + \pi k$,
$y = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

5. Jei

$$p = x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4)$$

yra pirminis skaičius, tai $x - y = 1$. Kadangi x ir y – pirminiai, tai galimas vienintelis atvejis, kai $x = 3$, $y = 2$. Tada

$$p = 3^5 - 2^5 = 211$$

taip pat yra pirminis.

Atsakymas: gali, $211 = 3^5 - 2^5$.

6. Tarkime, kad studijuoja n studentų ir a iš jų gavo vienodus pažymius, o b – geresnius. Tada

$$\frac{9,8}{100} \leqslant \frac{a}{n} \leqslant \frac{9,9}{100},$$

$$\frac{1000}{99}a \leqslant n \leqslant \frac{1000}{98}a.$$

Jeigu $1 \leqslant a \leqslant 4$, tai intervale $[1000a/99; 1000a/98]$ nėra sveikojo skaičiaus, o jei $a \geqslant 5$, tai šiame intervale sveikasis skaičius yra. Tegul $a = 5$. Tada $n = 51$. Kadangi

$$\frac{50}{100} \leqslant \frac{b}{n} \leqslant \frac{50,9}{100},$$

$$\frac{n}{2} \leqslant b \leqslant \frac{509n}{1000},$$

tai intervale $[n/2; 509n/1000]$ taip pat turi būti sveikasis skaičius. Todėl $n = 51$ netinka. Tačiau, jei $a = 6$, tai $n = 61$ ir $b = 31$ yra sveikasis skaičius intervale $[61/2; 509{\cdot}61/1000]$.

Atsakymas: 61.

7. Turime

$$0 \leqslant (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc),$$

$$-ab + ac + bc \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{7}{8} < 1,$$

o padaliję abi puses iš abc gauname

$$-\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} < \frac{1}{abc}.$$

8. Pastebėkime, kad lentoje užrašytų skaičių kvadratų suma visada išlieka ta pati. Iš tiesų, jei iš skaičių trejeto a, b, c gaunamas trejetas $(a+b)/\sqrt{2}, (a-b)/\sqrt{2}, c$, tai

$$\Big(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\Big)^2 + c^2$$

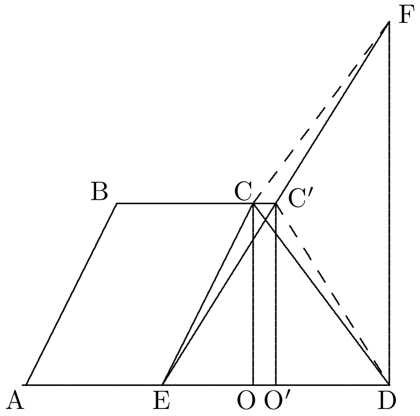
$$= \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2} + \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Tačiau $\sqrt{2}^2 + 2^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 6,5$, o

$$1^2 + \sqrt{2}^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2} > 6,5,$$

todėl tokio trejeto gauti negalima.

Atsakymas: ne.



1 pav.

9. Tegul $AD = 16$, $BC = 6$, $CO \perp AD$, $CE \parallel AB$, O' – atkarpos ED vidurys, $C'O' \perp AD$, C' – atkarpos EF vidurys, $FD \perp AD$ (1 pav.). Turime $ED = AD - AE = AD - BC = 10$. Tarkime, kad į trapeciją įbrėžto apskritimo skersmuo lygus 10, t.y. $CO = 10$. Tada

$$CE + CD = CE + CF \geqslant EF = 2EC' = 2\sqrt{C'O'^2 + EO'^2}$$

$$= 2\sqrt{CO^2 + \left(\frac{1}{2}ED\right)^2} = 2\sqrt{125} = 10\sqrt{5}.$$

Kita vertus,

$$CE + CD = AB + CD = AD + BC = 22.$$

Taigi $22 \geqslant 10\sqrt{5}$, $2,2^2 = 4,84 \geqslant 5$. Prieštara.

Atsakymas: ne.

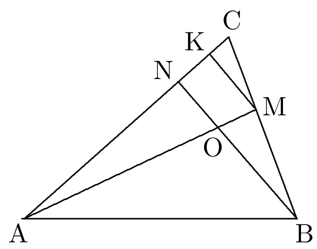
10. Tegul $AN = 3CN$, $BM = 2CM$, $MK \parallel BN$ (2 pav.). Iš panašiųjų trikampių CKM ir CNB gauname

$$CK = CN \cdot \frac{CM}{BC} = CN \cdot \frac{CM}{CM + BM} = CN \cdot \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}CN.$$

Taigi $KN = CN - CK = \frac{2}{3}CN$. Iš panašiųjų trikampių AON ir AMK gauname

$$\frac{AO}{MO} = \frac{AN}{KN} = \frac{3CN}{KN} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Atsakymas: 4,5.



2 pav.

11. Tarkime, kad stačiakampio kraštinių ilgiai yra b ir c, o įstrižainės ilgis yra d. Tada jo plotas yra lygus bc, o

$$bc \leqslant \frac{1}{2}(b^2 + c^2) = \frac{1}{2}d^2.$$

Taigi stačiakampio plotas yra ne didesnis už pusę to stačiakampio įstrižainės kvadrato. Vadinasi, dydis

$$\frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2\right)$$

yra ne mažesnis už dalijimo stačiakampių plotų sumą, t.y. už kvadrato plotą. Tačiau kvadrato su įstrižaine a plotas yra lygus $a^2/2$, taigi

$$\frac{1}{2}\left(a_1^2 + \ldots + a_m^2\right) \geqslant \frac{1}{2}a^2,$$

ir gauname reikiamą nelygybę.

12. *1 būdas.* Tarkime, kad $f(x)$ yra periodinė funkcija, o jos periodas T. Tada

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+T) - f(x) \\ &= \sin(x+T) - \sin x + \cos(x+T)^2 - \cos(x^2) \\ &= 2\sin(T/2)\,\cos(x+T/2) \\ &- 2\sin(xT + T^2/2)\,\sin(x^2 + xT + T^2/2). \end{aligned}$$

Imkime $x = -T/2$. Gauname, kad $\sin(T/2)=0$, t.y. $T=2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Tada

$$f(T) = f(0) = 1,$$

t.y.

$$\begin{aligned} 1 = f(T) &= \sin T + \cos(T^2) = \sin(2\pi k) + \cos(4\pi^2 k^2) \\ &= \cos(4\pi^2 k^2), \\ 4\pi^2 k^2 &= 2\pi n, \\ 2\pi &= n/k^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Gauname prieštarą, kadangi π nėra racionalusis skaičius.

2 būdas. Jei funkcija $\sin x + \cos(x^2)$ yra periodinė, tai ir jos išvestinė $\cos x - 2x\,\sin(x^2)$ taip pat yra periodinė funkcija. Tarkime, kad t yra jos periodas. Intervale $[0;t]$ (taigi ir su visais realiaisiais x) ši funkcija yra ne didesnė už $1 + 2t$. Tačiau imdami $x = \sqrt{2\pi k + \pi/2}$, $k \in \mathbb{N}$, matome, kad ši funkcija nėra aprėžta

$$\left|\cos\left(\sqrt{2\pi k + \pi/2}\right) - 2\sqrt{2\pi k + \pi/2}\,\sin(2\pi k + \pi/2)\right| > 2\sqrt{2\pi k} - 1.$$

Prieštara.

13. Jei su visais realiaisiais x funkcija $f(x) = ae^x + b$ sutampa su funkcija $g(x) = e^{ax+b}$, tai su visais x sutampa ir jų išvestinės

$$f'(x) = ae^x = ae^{ax+b} = g'(x).$$

Taigi $a = 0$ arba $x = ax + b$, t.y. $a = 1$, $b = 0$. Jeigu $a = 0$, tai $b = e^b$, tačiau su visais realiaisiais x galioja nelygybė $e^x > x$ (kai $x \leqslant 0$, ši nelygybė akivaizdi, o kai $x > 0$, turime $(e^x - x)' = e^x - 1 > 0$, t.y. $e^x - x$ yra didėjanti funkcija). Pora $a = 1$, $b = 0$ tinka.

Atsakymas: $a = 1$, $b = 0$.

14. Su visais realiaisiais y galioja nelygybė

$$|\cos y| + |\cos(2y)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(žr. A. Dubickas, *XI Lietuvos komandinė matematikos olimpiada*. Vilniaus universiteto leidykla, 1997, 16 užd.). Suskirstę duotąją sumą į poras, kurių yra ne mažiau negu $n/2$, ir įvertinę kiekvieną iš jų skaičiumi $1/\sqrt{2}$ iš apačios (jei n – lyginis, $|\cos(2^n x)|$ įvertiname nuliu) gauname

$$|\cos x| + |\cos(2x)| + \ldots + |\cos(2^n x)| \geqslant \frac{n}{2\sqrt{2}} > \frac{n}{3}.$$

15. Trupmenas užrašykime taip:

$$\frac{k}{k + (n+2)}, \quad k = 7, 8, \ldots, 31.$$

Jos nesuprastinamos, kai skaičių k ir $n+2$ didžiausiasis bendrasis daliklis $(k, n+2) = 1$ su visais $k = 7, 8, \ldots, 31$. Aišku, kad n reikšmės $1 \leqslant n \leqslant 29$ netinka. Jei $n = 30, 31, 32, 33, 34$, tai atitinkamai $(8, 32) \neq 1$, $(9, 33) \neq 1$, $(8, 34) \neq 1$, $(10, 35) \neq 1$, $(8, 36) \neq 1$. Tačiau, kai $n = 35$, tai $n + 2 = 37$ yra pirminis skaičius, todėl jis tarpusavyje pirminis su $7, 8, \ldots, 31$.

Atsakymas: $n = 35$.

16. Kadangi

$$-7x^2 + 3x + 4 = 4 + \frac{9}{28} - 7\Big(x - \frac{3}{14}\Big)^2 < 5,$$

tai kairioji lygties pusė gali būti lygi $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$. Kita vertus, dešinioji pusė yra sveikasis skaičius, ne mažesnis už 1. Taigi belieka reikšmės 1 ir 2.

Pirmuoju atveju turime sistemą

$$\begin{cases} [-7x^2+3x+4]=1, \\ [2-\sin x]=1. \end{cases}$$

Iš nelygybių $1 \leqslant -7x^2+3x+4 < 2$ gauname, kad

$$x \in \left[\frac{3-\sqrt{93}}{14}; \frac{3-\sqrt{65}}{14}\right) \bigcup \left(\frac{3+\sqrt{65}}{14}; \frac{3+\sqrt{93}}{14}\right].$$

Antroji lygtis tenkinama, kai $\sin x > 0$, t.y. tinka intervalas $\left(\frac{3+\sqrt{65}}{14}; \frac{3+\sqrt{93}}{14}\right]$.

Antruoju atveju turime

$$\begin{cases} [-7x^2+3x+4]=4, \\ [2-\sin x]=2. \end{cases}$$

Iš nelygybės $4 \leqslant -7x^2+3x+4$ gauname, kad $x \in [0; 3/7]$. Antroji lygtis tenkinama, kai $\sin x \leqslant 0$, t.y. tinka reikšmė $x=0$.

Atsakymas: $x = \{0\} \bigcup \left(\frac{3+\sqrt{65}}{14}; \frac{3+\sqrt{93}}{14}\right]$.

17. Iš sąlygos $4x+5y=7$ matome, kad x ir y turi skirtingus ženklus. Jei $x>0$, o $y<0$, tai

$$5|x|-3|y| = 5x+3y = 5x+\frac{3}{5}(7-4x) = \frac{21+13x}{5}.$$

Šis reiškinys įgyja mažiausią reikšmę, kai x įgyja mažiausią reikšmę. Mažiausia natūralioji x reikšmė, su kuria lygtis $4x+5y=7$ turi sveikąjį sprendinį, yra $x=3$. Tada

$$5|x|-3|y| = \frac{21+13x}{5} = 12.$$

Jei $x<0$, o $y>0$, tai

$$5|x|-3|y| = -5x-3y = -5x-\frac{3}{5}(7-4x) = -\frac{21+13x}{5}.$$

Didžiausia neigiamoji x reikšmė, su kuria $4x + 5y = 7$ turi sveikąjį sprendinį, yra $x = -2$. Tada

$$5|x| - 3|y| = -\frac{21 + 13x}{5} = 1.$$

Atsakymas: 1.

18. Aišku, kad $(x, y, z) = (2^5, 2^3, 2^4)$ yra toks sprendinys. Jei n – natūralusis skaičius, tai $(2^5 n^{20}, 2^3 n^{12}, 2^4 n^{15})$ taip pat yra natūralusis sprendinys. Pavyzdžiui, galima paimti ir

$$(x, y, z) = \big((1 + m^3)^5 m, (1 + m^3)^3, (1 + m^3)^4\big)$$

su natūraliuoju m.

19. Įrodysime, kad su natūraliuoju k skaičius $4k + 2$ nėra lygus keleto iš eilės einančių skaičių kubų sumai. Iš tiesų lyginių skaičių kubai dalijasi iš 4, o nelyginių skaičių kubai moduliu 4 paeiliui yra 1 ir –1. Taigi kubų suma moduliu 4 nėra 2. Duotasis skaičius moduliu 4 yra 2.

Atsakymas: ne.

20. *1 būdas.* Turime

$$\begin{aligned}
1 &\geqslant \sin(2\alpha_1)\,\sin(2\alpha_2)\ldots\sin(2\alpha_{1997}) \\
&= 2^{1997} \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_{1997}\, \cos\alpha_1 \ldots \cos\alpha_{1997} \\
&= 2^{1997} \big(\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_{1997}\big)^2,
\end{aligned}$$

t.y.

$$\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_{1997} \leqslant 2^{-1997/2}.$$

Lygybė gaunama, pavyzdžiui, kai $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{1997} = \pi/4$.

2 būdas.

$$\begin{aligned}
1997 &= \sin^2\alpha_1 + \ldots + \sin^2\alpha_{1997} + \cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_{1997} \\
&\geqslant 1997 \sqrt[1997]{\sin^2\alpha_1 \ldots \sin^2\alpha_{1997}} \\
&+ 1997 \sqrt[1997]{\cos^2\alpha_1 \ldots \cos^2\alpha_{1997}} \\
&= 2 \cdot 1997 \big(\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_{1997}\big)^{2/1997},
\end{aligned}$$

t.y.

$$\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_{1997} \leqslant 2^{-1997/2}.$$

Atsakymas: $2^{-1997/2}$.

XIII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1998 10 17

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS. Leidyklos TEV ir ALMA LITTERA.

Organizacinis komitetas: R. Kašuba (pirmininkas), A. Dubickas.
Vertinimo komisija: A. Dubickas (pirmininkas), G. Alkauskas, V. Bagdonavičius, A. Bastys, V. Čekanavičius, R. Garunkštis, M. Gasiūnas, R. Jodelis, R. Kašuba, K. Karčiauskas, V. Kazakevičius, R. Krasauskas, V. Mackevičius, A. Mačiulis, J. Mačys, M. Manstavičius, H. Markšaitis, A. Plikusas, J. Šiaulys, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta ir profesoriaus Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **Kauno technologijos universiteto gimnazijos pirmajai komandai**.

Antroji vieta – **Vilniaus komandai**.

Trečioji vieta – **Kretingos komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
VU MaF	5	0	6	5	5	-	6	5	5	7	5	5	5	4	8	7	4	5	5	8	100	–
KTU I	4	0	6	0	5	2	6	5	5	7	5	5	5	4	0	7	5	5	5	1	82	1
Vilniaus	0	-	0	5	5	-	-	5	5	0	1	5	5	4	0	0	5	5	5	1	51	2
Kretingos	-	-	-	5	5	7	-	5	-	-	5	5	-	4	-	-	4	5	5	0	50	3
Šiaulių	5	0	-	5	2	0	-	5	5	0	5	-	5	1	0	0	5	5	5	1	49	4
Tauragės	5	-	-	5	5	-	-	5	-	-	-	4	5	8	0	0	5	5	0	0	47	5
VU FuX	-	0	-	4	4	-	-	5	5	-	-	1	5	1	0	1	5	5	5	4	45	–
Panevėžio B *	4	-	6	4	4	-	6	5	3	-	1	-	0	1	0	-	5	5	0	0	44	6
Vilniaus lic.	5	0	-	-	5	-	-	5	1	-	3	5	5	2	0	0	2	5	-	1	39	7
Kauno „Saulė“	-	-	-	5	5	-	-	5	2	0	5	-	-	0	-	0	5	4	5	0	36	8
KTU II	0	-	0	5	0	0	0	5	4	-	-	-	0	3	0	-	5	5	4	1	32	9
Marijampolės	5	-	-	0	5	7	-	0	-	-	-	2	0	1	-	1	4	5	0	1	31	10
Panevėžio	5	0	0	0	0	1	-	5	3	-	-	-	5	0	0	1	5	-	0	0	25	11
Mažeikių	-	-	0	5	1	-	1	5	3	0	-	-	-	-	-	-	5	-	-	1	21	12
Rokiškio	-	-	-	5	5	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	2	0	0	0	16	13
Kupiškio	1	-	-	5	0	0	-	4	-	0	-	-	-	0	-	-	2	0	0	0	12	14
Raseinių	-	-	-	0	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	9	15

* Panevėžio J. Balčikonio vidurinė mokykla.

VU MaF (Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto) pirmakursių ir VU FuX (Fizikos ir Teisės fakultetų pirmakursių) komandos dalyvavo be konkurso.

Uždavinių sąlygos

1. Iš skaičiaus 1998 skaitmenų sudaromi visi įmanomi keturženkliai skaičiai. Kiek iš jų yra dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų skirtumas?

2. Turime 1998 realiuosius skaičius, kurių suma yra lygi nuliui, o kvadratų suma – vienetui. Įrodykite, kad iš jų atsiras du tokie skaičiai, kurių sandauga bus ne didesnė už $-1/1998$.

3. Jeigu $a \geqslant b \geqslant c > 0$, tai įrodykite, kad

$$\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a - 4b + c.$$

4. Išspręskite lygtį $\sin^6 x + \cos^8 x = 1$.

5. Raskite visus tokius a, su kuriais $(a+1)\,x^2 - 2(a-1)\,x + 3a - 3$ yra neneigiamas, kad ir koks bebūtų realusis skaičius x.

6. Raskite realiuosius lygties $x^4 - 12x + 3 = 0$ sprendinius.

7. Įrodykite, kad iš 13 skirtingų realiųjų skaičių visada galima nurodyti du tokius skaičius x ir y, jog

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

8. Įrodykite, kad $3n$ vienetų turintis skaičius $\underbrace{11\ldots1}_{3n}$ be liekanos dalijasi iš 37.

9. Sakykime, kad a_n yra paskutinis skaičiaus $n(n+1)/2$ dešimtainės išraiškos skaitmuo. Raskite

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{1998}.$$

10. Seka $\{a_n\}$ apibrėžiama sąlygomis $a_1 = 6$,

$$a_{n+1} = \Big[\frac{5a_n}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2 - 12}\Big], \quad n \geqslant 1.$$

Įrodykite, kad $a_n - 1$ dalijasi iš 10, jei $n \geqslant 2$.

11. Raskite visus daugianarius $P(x)$, tenkinančius sąlygą

$$P(x^2) = 2xP(x+1) + 3 - 10x - 2x^2.$$

12. Įrodykite, kad jeigu skaičiaus 5^n dešimtainėje išraiškoje yra k skaitmenų, tai skaičiaus 2^n dešimtainėje išraiškoje jų yra $n - k + 1$.

13. Išspręskite lygtį

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345.$$

14. Raskite funkcijos

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-1998|$$

mažiausiąją reikšmę.

15. Ar yra tokia baigtinė, ne mažesnė kaip 4 elementų realiųjų skaičių aibė A , iš kurios kad ir kokius skirtingus elementus a , b , c ir d paėmus, skaičius $ab + cd$ irgi priklausytų A ?

16. Sakykime, kad bet kurio Lietuvos rajono vidutinė metinė temperatūra yra lygi kaimyninių rajonų temperatūrų aritmetiniam vidurkiui. Ar galėtų atsitikti taip, kad vidutinė metinė Vilniaus rajono temperatūra yra 6^0C, o Klaipėdos rajono – 5^0C.

17. Lygiašonės trapecijos įstrižainės yra statmenos, o jos plotas lygus 10. Raskite tos trapecijos aukštinę.

18. Į trikampį įbrėžtas apskritimas ir nubrėžta lygiagreti su pagrindu liestinė. Raskite trikampio perimetrą, jeigu jo pagrindo ilgis 25, o trikampio viduje esančios liestinės atkarpos ilgis lygus 16.

19. Keturkampio $ABCD$ kampai ABC ir CDA yra statūs. Tegu K – nuleisto iš A į BD statmens pagrindas. Įrodykite, kad tada kampai BAK ir CAD yra lygūs.

20. Į kelias dalis gali padalyti plokštumą keturios tokios plokštumos tiesės?

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Tegul A yra natūraliųjų skaičių aibė, kurią sudaro tokie skaičiai, kurie yra dviejų kvadratų skirtumas. Kadangi

$$(n+2)^2 - n^2 = 4n + 4,$$

tai $8, 12, 16, 20, \ldots \in A$, o kadangi

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

tai $3, 5, 7, 9, \ldots, \in A$. Lyginių natūraliųjų skaičių kvadratai dalijasi iš 4, o nelyginių kvadratai moduliu 4 yra lygūs 1. Taigi $4k+2$, čia $k = 0, 1, 2, \ldots$, nėra jokių dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų skirtumas. Vadinasi, aibę A sudaro visi natūralieji skaičiai, išskyrus $1, 4$ ir $4k+2$; čia $k = 0, 1, 2 \ldots$.
Iš skaičiaus 1998 skaitmenų sudaryti lyginiai skaičiai nesidalija iš 4, nes 18 ir 98 nesidalija iš 4. Taigi tinka tik nelyginiai skaičiai 9981, 9891, 8991, 1899, 1989, 8199, 8919, 9189, 9819.

Atsakymas: 9 skaičiai.

2. Tegul $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant 0 \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant x_{1998}$. Kadangi $x_1 + \ldots + x_{1998} = 0$, tai

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$
$$= -x_1(x_{k+1} + \ldots + x_{1998}) \leqslant -(1998-k)x_1x_{1998}.$$

Analogiškai

$$x_{k+1}^2 + \ldots + x_{1998}^2 \leqslant (x_{k+1} + \ldots + x_{1998})x_{1998}$$
$$= -(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{1998} \leqslant -k\, x_1x_{1998}.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname

$$1 = x_1^2 + \ldots + x_{1998}^2 \leqslant -(1998-k)x_1x_{1998} - kx_1x_{1998}$$
$$= -1998x_1x_{1998}.$$

Taigi $x_1x_{1998} \leqslant -1/1998$.

3. Iš nelygybių $a \geqslant b \geqslant c > 0$ gauname $a+b \geqslant 2c$, taigi

$$\frac{a^2-b^2}{c} \geqslant 2(a-b) = 2a-2b.$$

Taip pat turime $2a \geqslant b+c$, todėl

$$\frac{c^2-b^2}{a} \geqslant 2(c-b) = 2c-2b.$$

Analogiškai iš nelygybės $a+c \geqslant b$ gauname

$$\frac{a^2-c^2}{b} \geqslant a-c.$$

Sudėję šias tris nelygybes, gauname

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 2a-2b+2c-2b+a-c = 3a-4b+c.$$

4. Kadangi $\sin^2 x$ ir $\cos^2 x \leqslant 1$, tai

$$1 = \sin^6 x + \cos^8 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Lygybė galioja, kai $\sin^4 x = 1$ arba $\cos^6 x = 1$, t.y. kai $\sin^2 x = 1$ arba $\sin^2 x = 0$. Taigi $x = \pi n/2$, čia $n \in \mathbb{Z}$.

Atsakymas: $x = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Aišku, kad $a > -1$. Kvadratinio trinario diskriminantas yra lygus

$$D = 4(a-1)^2 - 4(a+1)(3a-3) = 8(1-a)(a+2).$$

Taigi

$$(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 = \frac{\big(2(a+1)x - 2(a-1)\big)^2 - D}{4(a+1)}$$

$$= \frac{\big((a+1)x-(a-1)\big)^2 + 2(a-1)(a+2)}{a+1}.$$

Kadangi $a > -1$, tai iš nelygybės $(a-1)(a+2) \geqslant 0$ gauname $a \geqslant 1$.

Atsakymas: $a \in [1; +\infty)$.

6. Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned} x^4 - 12x + 3 &= x^4 + 6x^2 + 9 - 6x^2 - 12x - 6 \\ &= \left(x^2+3\right)^2 - 6(x+1)^2 \\ &= \left(x^2 + 3 + \sqrt{6}(x+1)\right)\left(x^2 + 3 - \sqrt{6}(x+1)\right). \end{aligned}$$

Lygtis $x^2 + 3 + \sqrt{6}x + \sqrt{6} = 0$ realiųjų šaknų neturi, o lygties $x^2 + 3 - \sqrt{6}x - \sqrt{6} = 0$ šaknys yra

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6}\right).$$

Atsakymas: $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6}-6}\right)$.

7. Aišku, kad ir koks būtų realusis x_j, $j = 1, 2, \ldots, 13$, atsiras toks realusis α_j, $j = 1, 2, \ldots, 13$, $-\pi/2 < \alpha_j < \pi/2$, kad $x_j = \mathrm{tg}\alpha_j$. Iš Dirichlė principo išplaukia, kad yra bent du tokie indeksai m ir n, jog

$$0 < \mathrm{tg}(\alpha_m - \alpha_n) < \mathrm{tg}15^{\circ} = 2 - \sqrt{3}.$$

Kadangi

$$\mathrm{tg}(\alpha_m - \alpha_n) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_m - \mathrm{tg}\alpha_n}{1 + \mathrm{tg}\alpha_m\,\mathrm{tg}\alpha_n} = \frac{x_m - x_n}{1 + x_m x_n},$$

tai skaičių pora $(x, y) = (x_m, x_n)$ tenkina uždavinio sąlygą.

8. Aišku, kad $3n$ vienetų turintis skaičius be liekanos dalijasi iš 111. Kadangi 111=3 · 37, tai iš čia išplaukia ir uždavinio teiginys.

9. Pastebėkime, kad skirtumas

$$\frac{(n+20)(n+21)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n^2+41n+420-n^2-n}{2}=20n+210=10(2n+21)$$

dalijasi iš 10, todėl skaičiaus $n(n+1)/2$ dešimtainės išraiškos paskutinis skaitmuo sutampa su skaičiaus $(n+20)(n+21)/2$ paskutiniu skaitmeniu. Kai $n=1,2,3,\ldots,20$, tai $n(n+1)/2$ paskutinis skaitmuo yra atitinkamai 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0. Toliau ši seka periodiškai kartojasi. Kadangi 1998=99 · 20+18, tai ieškomoji suma yra lygi

$$99\,(1+3+6+0+5+1+8+6+5+5+6+8+1+5$$
$$+0+6+3+1+0+0)+1+3+6+0+5+1+8+6$$
$$+5+5+6+8+1+5+0+6+3+1=100\cdot 70=7000.$$

Atsakymas: 7000.

10. Įrodysime, kad $a_{n+1}=2a_n-1$. Aišku, kad

$$a_{n+1}\leqslant\frac{5a_n}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-12}$$
$$<\frac{5a_n}{4}+\frac{3a_n}{4}=2a_n.$$

Lieka įrodyti, jog $a_{n+1}\geqslant 2a_n-1$. Iš tiesų, jei $a_{n+1}\leqslant 2a_n-2$, tai

$$2a_n-1\geqslant a_{n+1}+1>\frac{5a_n}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-12},$$

t.y.

$$3a_n-4>3\sqrt{a_n^2-12}.$$

Iš šios nelygybės gauname

$$9a_n^2-24a_n+16>9a_n^2-36,$$

t.y. $a_n < 13/6 < 3$. Prieštara. Taigi $a_2 = 2a_1 - 1 = 11$ ir $a_2 - 1$ dalijasi iš 10. Jei $a_n - 1$ dalijasi iš 10, kai $n \geqslant 2$, tai

$$a_{n+1} - 1 = 2a_n - 2 = 2(a_n - 1)$$

taip pat dalijasi iš 10. Teiginys įrodytas remiantis indukcija.

11. Iš karto aišku, kad šis daugianaris (jei toks egzistuoja) nėra konstanta. Tarkime, kad jo laipsnis yra n, $n \geqslant 1$. Tada dešiniosios lygybės

$$P(x^2) + 2x^2 = 2x\,P(x+1) + 3 - 10x$$

pusės laipsnis yra $n+1$. Jei $n > 1$, tai kairiosios pusės laipsnis yra $2n$, t.y. daugiau negu $n+1$. Taigi tegul $n = 1$ ir $P(x) = ax + b$. Tada

$$(a+2)x^2 + b = 2x\big(a(x+1) + b\big) + 3 - 10x,$$

t.y.

$$(2-a)x^2 + (10 - 2a - 2b)x + b - 3 = 0.$$

Gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2 - a = 0, \\ 10 - 2a - 2b = 0, \\ b - 3 = 0, \end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį $a = 2$, $b = 3$.

Atsakymas: $2x + 3$.

12. Jei skaičiaus 5^n dešimtainėje išraiškoje yra k skaitmenų, tai $10^{k-1} \leqslant 5^n < 10^k$. Padauginę šią nelygybę iš 2^n, gauname

$$2^n \cdot 10^{k-1} \leqslant 10^n < 2^n \cdot 10^k,$$

iš čia išplaukia

$$10^{n-k} < 2^n \leqslant 10^{n-k+1}.$$

Kadangi $2^n \neq 10^{n-k+1}$ (čia viena pusė dalijasi iš 5, o kita ne), tai
$$10^{n-k} < 2^n < 10^{n-k+1}.$$

Vadinasi, 2^n turi $n-k+1$ skaitmenį.

13. Tarkime, kad k yra natūralusis, o x – teigiamas realusis skaičius. Tada
$$k[x] \leqslant [kx] \leqslant kx < k\big([x]+1\big) = k[x]+k,$$
taigi $k[x] \leqslant [kx] \leqslant k[x]+k-1$. Vadinasi,
$$\begin{aligned}63[x] &\leqslant [x]+[2x]+\ldots+[32x]\\ &\leqslant 63[x]+1+3+7+15+31 = 63[x]+57,\end{aligned}$$
t.y. $63[x] \leqslant 12345 \leqslant 63[x]+57$. Jei $[x] \leqslant 195$, tai $63[x]+57 \leqslant 12342 < 12345$, o jei $[x] \geqslant 196$, tai $63[x] \geqslant 12348 > 12345$. Vadinasi, ši nelygybių sistema, tuo pačiu ir duotoji lygtis, sprendinių neturi.

Atsakymas: $\emptyset$.

14. Tarkime, kad $a < b$. Tada
$$|x-a|+|x-b| = \begin{cases} a+b-2x, & \text{kai } x < a,\\ b-a, & \text{kai } a \leqslant x \leqslant b,\\ 2x-a-b, & \text{kai } x > b.\end{cases}$$

Taigi funkcijos $|x-a|+|x-b|$ mažiausioji reikšmė yra $b-a$, o pasiekiama ji yra intervale $x \in [a;b]$. Suskirstę duotąją sumą į poras, turime
$$\begin{aligned}&|x-1|+|x-1998|+|x-2|+|x-1997|+\ldots+|x-999|\\ &+|x-1000| \geqslant 1998-1+1997-2+\ldots+1000-999\\ &= 1+2+\ldots+1998-2(1+2+\ldots+999) = 999^2 = 998001.\end{aligned}$$

Lygybė gaunama intervale [999; 1000].

Atsakymas: 998001.

15. Taip, pavyzdžiui, $\{0, 1/2, 1, 2\}$.

Atsakymas: taip.

16. Tarkime, kad M yra didžiausioji iš visų temperatūrų. Ji yra lygi kaimyninių rajonų temperatūrų aritmetiniam vidurkiui. Aišku, kad tada visų kaimyninių rajonų temperatūros taip pat lygios M ir t.t. Iš čia išplaukia, kad visos temperatūros lygios.

Atsakymas: ne.

17. Tarkime, kad trapecijos pagrindų ilgiai yra lygūs a ir b, aukštinės ilgis – h, o įstrižainės ilgis – d. Kadangi trapecija lygiašonė, o jos įstrižainės statmenos, tai jos plotas

$$S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{a+b}{2}h.$$

Taigi

$$d^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant 2h\,\frac{a+b}{2} = 2S = d^2.$$

Lygybė čia yra tik tada, kai

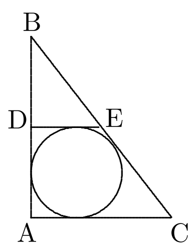
$$h = \frac{a+b}{2}.$$

Vadinasi, $S = h^2$ ir $h = \sqrt{S} = \sqrt{10}$.

Atsakymas: $\sqrt{10}$.

18. Tarkime, kad $AC = 25$, $DE = 16$. Tada

$$AD + CE = AC + DE = 25 + 16 = 41.$$



3 pav.

Pažymėkime $x = BD + BE$ (3 pav.). Iš panašiųjų trikampių BDE ir BAC gauname

$$\frac{BD + BE}{AB + BC} = \frac{DE}{AC},$$

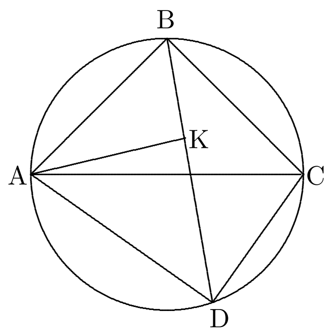
t.y.

$$\frac{x}{x + 41} = \frac{16}{25}.$$

Iš čia $x = 656/9$. Trikampio perimetras lygus

$$\frac{656}{9} + 41 + 25 = \frac{1250}{9}.$$

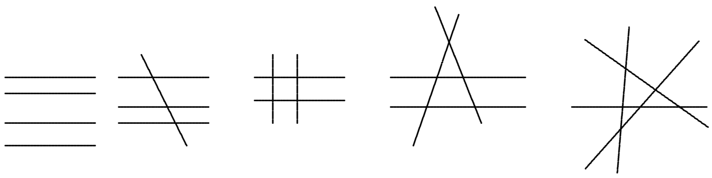
Atsakymas: 1250/9.



4 pav.

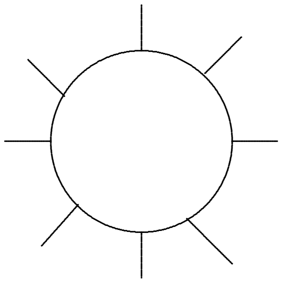
19. Aišku, kad kampai CAD ir CBD yra lygūs (4 pav.). Iš stačiojo trikampio BKA gauname, kad $BAK = 90^o - ABD$. Kadangi kampas $ABC = 90^o$, tai $CBD = 90^o - ABD$. Taigi $BAK = CBD = CAD$.

20. Iš 5 pav. matome, kad keturios tiesės gali padalyti plokštumą į



5 pav.

5, 8, 9, 10 ir 11 dalių. Įrodysime, kad kitų atvejų čia negali būti. Aišku, kad jei visos keturios tiesės yra lygiagrečios, tai jos dalija plokštumą į 5 dalis. Tarkime, kad ne visos tiesės lygiagrečios. Tada yra ir jų susikirtimo taškų. Tegul K yra apskritimas, kurio viduje yra visi susikirtimo taškai. Iš šio apskritimo išeina 8 spinduliai (6 pav.), taigi yra ne mažiau kaip 8 dalys. Lieka



6 pav.

įrodyti, kad iš viso dalių yra ne daugiau kaip 11. Iš tiesų pirma tiesė dalija plokštumą į dvi dalis. Antroji tiesė dalių skaičių gali padidinti dar dviem dalimis, be to, atsiras vienas susikirtimo taškas. Trečioji tiesė duoda dar daugiausiai du susikirtimo taškus bei tris dalis. Ketvirtoji – tris susikirtimo taškus ir keturias dalis. Iš viso gali būti ne daugiau kaip

$$2 + 2 + 3 + 4 = 11$$

dalių.

Atsakymas: 5, 8, 9, 10 ir 11.