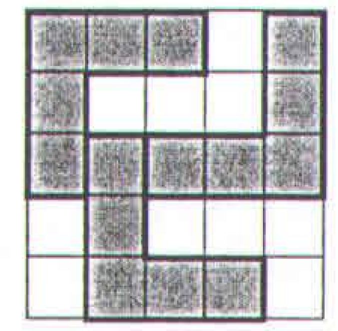
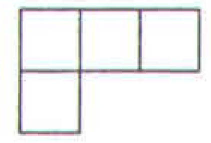
ALYTAUS APSKRITIES JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ
DVYLIKTOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Simnas, 2007 m. gruodžio mėn. 1 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

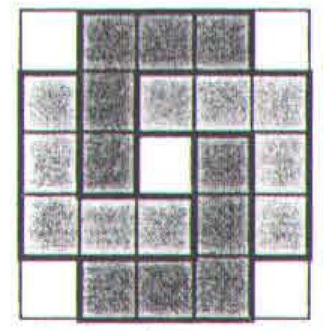
UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS



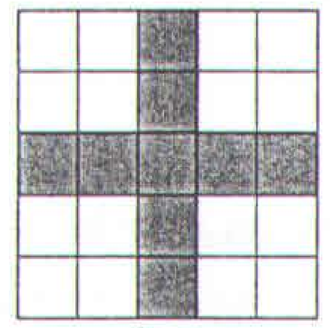
1. Iš 5×5 kvadrato langelių galima sudaryti tris nesikertančias (neturinčias bendrų langelių) formos  figūras (žr. pav.).

Sprendimas. Atsakymas į pirmą klausimą yra teigiamas. Jį galima pagrįsti konkrečiu pavyzdžiu (žr. 1 pav.).

Atsakymas į antrąjį klausimą yra neigiamas. Nubrėžus 9 langelių kryžių (žr. 2 pav.), galima lengvai išsiaiškinti, kad kiekviena nagrinėjamos formos 5 langelių figūra uždengia ne mažiau kaip du šio kryžiaus langelius.



1 pav.



2 pav.

2. – Pasakyk, Jonai, kokia tavo gimimo data, – paprašė klasės draugas Petras.
– Nagi, atspėk pats, – atsakė Jonas.
– Tai kad čia labai daug galimybių...
– Gerai, padėsiu! Padauginęs mano gimimo mėnesio numerį iš 31, o gimimo datos dieną iš 12, gautum du skaičius. Šių skaičių suma būtų 384.

Raskite Jono gimimo datą (mėnesį ir dieną).

Sprendimas. Tegu x mėnesio numeris, o y – diena. Reikia išspręsti lygtį $31x+12y=384$ (ieškant sveikųjų sprendinių $(x;y)$). Pagal uždavinio sąlygą $x\in\{1;2;3;...;12\}$, $y\in\{1;2;3;...;31\}$. Parašę $31x=384-12y=4(96-3y)$, matome, kad x turi dalytis iš 4 (nes 31 yra pirminis skaičius). Vadinasi, $x\in\{4;8;12\}$. Tikrindami randame vienintelį sprendinį (12, 1).

Ats.: Gruodžio pirmoji diena.

3. Natūralusis skaičius n turi du daliklius, o skaičius $(n+1)$ turi tris daliklius. Nustatykite, kiek daliklių turi natūralusis skaičius $(n+2)$.

Sprendimas. Aišku, kad n yra pirminis skaičius. Be to, $n\neq2$, nes tada $(n+1)$ būtų pirminis skaičius 3 ir turėtų tik du daliklius. Taigi n yra nelyginis pirminis skaičius. Tada $(n+1)$ yra lyginis skaičius. Jo dalikliai turi būti 1, 2 ir $(n+1)$. Bet $n+1=2k$; todėl ir k turi būti daliklis. Jei $k>2$, tai $(n+1)$ turėtų ne mažiau kaip 4 daliklius. Vadinasi, $k=2$. Gauname, jog $n+1=4$ ir $n+2=5$. Šis skaičius turi 2 daliklius.

Ats.: 2.

4. Iš dešimties skaitmenų 0, 1, 2, ..., 9 sudarykite penkis dviženklius skaičius, kurių sandauga būtų didžiausia (kiekvieną skaitmenį galima panaudoti tik vieną kartą).

Sprendimas. Pradėkime nuo sandaugos $10\cdot 23\cdot 45\cdot 67\cdot 89$ ir keiskime jas naujomis:

$$10\cdot 23\cdot 45\cdot 67\cdot 89 < 19\cdot 23\cdot 45\cdot 67\cdot 80 < 91\cdot 32\cdot 54\cdot 76\cdot 80 <$$
$$< 91\cdot 36\cdot 54\cdot 72\cdot 80 < 90\cdot 63\cdot 54\cdot 72\cdot 81 = 9^5(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10).$$

Didesnės sandaugos gauti neįmanoma. Ši sandauga yra

$$90\cdot 63\cdot 54\cdot 72\cdot 81 = 1\,785\,641\,760.$$

Ats.: 54, 63, 72, 81, 90.

5. Iš eilės parašyti aštuoni natūralieji skaičiai. Pirmųjų penkių skaičių suma yra lygi paskutiniųjų trijų skaičių sumai. Raskite didžiausiąjį skaičių (iš aštuonių).

Sprendimas. Tegu m yra pirmasis skaičius. Tada

$$m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4)=(m+5)+(m+6)+(m+7).$$

Iš čia gauname:

$$5m+10=3m+18,$$
$$2m=8,$$
$$m=4.$$

Didžiausias yra skaičius $m+7$, taigi 11.

Ats.: 11.

6. Raskite visus realiuosius skaičius x, su kuriais galioja lygybė:

$$10^x+11^x+12^x=13^x+14^x.$$

Sprendimas. Padaliję lygtį iš 13^x, gausime lygtį

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{11}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1+\left(\frac{14}{13}\right)^x.$$

Funkcija $y=\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{11}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x$ yra mažėjanti intervale $(-\infty;+\infty)$, o funkcija $y=1+\left(\frac{14}{13}\right)^x$ yra didėjanti šiame intervale. Jų grafikų kreivės susikerta tik viename taške. Vadinasi, lygtis turi tik vieną sprendinį. Lengva patikrinti, kad $x=2$ tenkina lygtį.

Ats.: 2.

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2xy-2y-z^2=4. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pirmos lygties gauname $z=3-x-y$. Toliau pertvarkome antrą lygtį:

$$2xy-2y-(3-x-y)^2-4=0 \Rightarrow (x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=0$. Ši lygybė galioja tik tada, kai $x=3$ ir $y=2$. Vadinasi, $z=-2$. Sistema turi vienintelį sprendinį (3; 2; –2).

Ats.: (3; 2; –2).

8. Apskaičiuokite sumą

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

Sprendimas. Sumos dėmenis galima užrašyti formule $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, $n=1, 2, \ldots, 99$.

Juos pertvarkykime taip:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n^2+n}=$$
$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}};\quad n=1, 2, 3, \ldots, 99.$$

Tada

$$S=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=1-0{,}1=0{,}9.$$

Ats.: 0,9.

9. Apskaičiuokite sumą

$$S=\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+\ldots+\cos 359^\circ.$$

Sprendimas. Pagal formulę $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ turime:

$$\cos 359^\circ=\cos 1^\circ,\ \cos 358^\circ=\cos 2^\circ,\ \ldots,\ \cos 181^\circ=\cos 179^\circ;$$

todėl

$$S=2(\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\ldots+\cos 179^\circ)+\cos 180^\circ.$$

Remdamiesi formule $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, gauname:

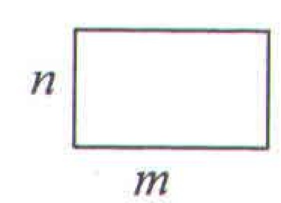
$$\cos 1^\circ+\cos 179^\circ=\cos 2^\circ+\cos 178^\circ=\ldots=\cos 89^\circ+\cos 91^\circ=0.$$

Vadinasi, $S=2\cos 90^\circ+\cos 180^\circ=-1$.

Ats.: –1.

10. Stačiakampio kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, o jų suma (stačiakampio perimetras) sutampa su skaičiumi, reiškiančiu šio stačiakampio plotą. Raskite stačiakampio kraštinių ilgius.

Sprendimas.



$$2(m+n)=mn,$$
$$2m-mn=-2n,$$
$$m=\frac{-2n}{2-n}=\frac{2n}{n-2}.$$

Matome, kad $n>2$. Be to, galima pertvarkyti formulę: $m=2+\frac{4}{n-2}$. Dabar matyti, kad $n\in\{3; 4; 6\}$. Galimi atsakymai (rašant $(m; n)$): (6; 3), (4; 4) ir (3; 6).

Ats.: stačiakampio kraštinių ilgiai 6 ir 3, o kvadrato – 4 (jis irgi tiktų, jeigu kvadratą laikytume stačiakampiu).