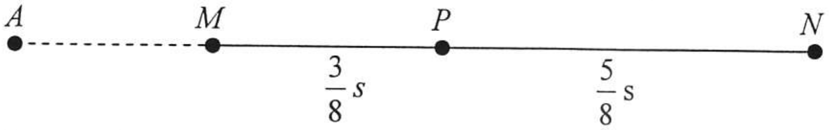
ALYTAUS APSKRITIES JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ TRYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Lazdijai, 2008 m. gruodžio mėn. 5 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Nuėjęs $\frac{3}{8}$ tilto pėstysis už savęs išgirdo automobilio signalą. Jeigu jis bėgtų pirmyn, tai automobilis jį pavytų tilto gale, o jeigu bėgtų atgal, tai jie susitiktų tilto pradžioje. Koks pėsčiojo bėgimo greitis (km/h), jeigu automobilio greitis 60 km/h?

Sprendimas. Tilto ilgį pažymėkime s (km). Pagal uždavinio sąlygą pradinę automobilio ir pėsčiojo padėtį tilto MN atžvilgiu galima pavaizduoti taip:



(čia tašku A pažymėtas automobilis, o tašku P – pėstysis).

Pėsčiojo greitį pažymėję v (km/h), gausime tokias formules laikui apskaičiuoti:

$$t_1 = \frac{5s}{8v} \text{ – nubėgti tilto atkarpą } PN \text{ ir } t_2 = \frac{3s}{8v} \text{ – nubėgti tilto atkarpą } PM.$$

Pagal uždavinio sąlygą $s = MN = AN - AM = 60t_1 - 60t_2 = \frac{15s}{v}$. Iš čia gauname $v = 15$ (km/h).

Ats.: 15 km/h.

2. Šachmatų didmeistris vienu metu žaidė daug partijų. Per pirmąsias dvi valandas jis laimėjo 10 % visų žaistų partijų, o 8 partijas sužaidė lygiosiomis. Per kitas dvi valandas jis laimėjo 10 % likusių partijų, 2 pralaimėjo, o paskutines 7 baigė lygiosiomis. Kiek partijų žaidė didmeistris?

Sprendimas. Ieškomąjį partijų skaičių pažymėkime n. Pagal uždavinio sąlygą

$$n = (0{,}1n + 8) + (0{,}1(n - (0{,}1n + 8)) + 2 + 7) = 0{,}19n + 16{,}2;$$

iš čia gauname $n = 20$.

Ats.: 20.

3. Dešimtyje kortelių surašyti (po vieną) skaitmenys 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Korteles reikia sudėlioti po dvi taip, kad gautų dviženklių skaičių santykis būtų 2:3:4:5:10.

Sprendimas. Galima sudaryti tokius dviženklius skaičius: 18, 27, 36, 45, 90. Užrašius juos sandaugomis: $2\cdot 9$, $3\cdot 9$, $4\cdot 9$, $5\cdot 9$, $10\cdot 9$, matyti, kad šis rinkinys tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 18, 27, 36, 45, 90.

4. Tarp penkiaženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis raskite mažiausią, kuris dalijasi iš 71.

Sprendimas. Mažiausias penkiaženklis skaičius su skirtingais skaitmenimis yra 10234. Dalydami iš 71, gauname liekaną 10. Artimiausias penkiaženklis skaičius, kuris dalijasi iš 71 yra $10234 + 61 = 10295$. Visi šio skaičiaus skaitmenys yra skirtingi, todėl jis yra ieškomasis skaičius.

Ats.: 10295.

5. Tūkstančio skirtingų natūraliųjų skaičių suma lygi 1 000 998. Įrodykite, kad tarp šių skaičių yra bent du nelyginiai skaičiai.

Įrodymas. Sudėję tūkstantį pirmųjų lyginių skaičių 2, 4, 6, ..., 2000 gautume skaičių $2 + 4 + 6 + ... + 2000 = \frac{2 + 2000}{2} \cdot 1000 = 1001000$, kuris yra didesnis už 1000998.

Vadinasi, tik dalis pasirinktųjų skaičių galėtų būti lyginiai skaičiai, o kiti – turi būti nelyginiai skaičiai. Nelyginiai skaičiai į šį rinkinį turi įeiti poromis, nes visų skaičių suma yra lyginis skaičius. Taigi bent viena nelyginių skaičių pora yra pasirinktajame rinkinyje.

6. Raskite nors vieną natūralųjį skaičių a, su kuriuo skaičius $a^2 + a + 2009$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Tegu m yra natūralusis skaičius. Tada

$a^2 + a + 2009 = (a + m)^2 + 2009 + a - 2am - m^2 = (a + m)^2$, kai $2009 + a - 2am - m^2 = 0$.

Iš čia gauname, kad $a^2 + a + 2009 = (a + m)^2$, kai $a = \dfrac{2009 - m^2}{2m - 1}$.

Pasirinkę $m = 1$, gauname $a = 2008$. Šiuo atveju

$$a^2 + a + 2009 = (2008 + 1)^2 = 2009^2.$$

Kai $m = 3$, gauname $a = 400$ ir

$$a^2 + a + 2009 = (400 + 3)^2 = 403^2.$$

Ats.: gali būti 2008 ir 400.

7. Raskite visas natūraliųjų skaičių x ir y poras $(x;\ y)$, su kuriomis galioja lygybė

$$3x^2 + 5y^2 = 345.$$

Sprendimas. Iš $3x^2 + 5y^2 = 345$ gauname $x^2 = 115 - \dfrac{5}{3}y^2$.

Aišku, kad turi būti $y = 3k$, $k \in \mathrm{N}$. Todėl $x^2 = 115 - 15k^2 = 5(23 - 3k^2)$. Galimos tik dvi k reikšmės: 1 ir 2. Kai $k = 1$, tai $y = 3$ ir $x = 10$; kai $k = 2$, tai $y = 6$, bet x nėra natūralusis skaičius, nes $x^2 = 55$.

Ats.: (10; 3).

8. Įrodykite, kad teigiami skaičiai x ir y tenkina nelygybę $x^2 + y^2 < 1$, kai $x^3 + y^3 = x - y$.

Įrodymas. Kadangi $x > 0$ ir $y > 0$, tai

$$x^3 + y^3 = x - y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x - y} = 1, \\ x > y \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} < 1 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1.$$

9. Raskite reiškinio $|\cos^2 x - 4\sin x - 9|$ mažiausią reikšmę, kai x kinta intervale $[0;\ 2\pi]$.

Sprendimas. Taikydami žinomas formules, nagrinėjamąjį reiškinį pertvarkome taip:

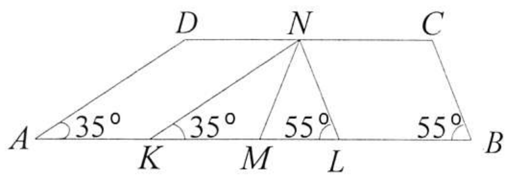
$|\cos^2 x - 4\sin x - 9| = |-\sin^2 x - 4\sin x - 8| = |\sin^2 x + 4\sin x + 8| = |(\sin x + 2)^2 + 4| =$

$= (\sin x + 2)^2 + 4$. Aišku, kad $(\sin x + 2)^2 \geq (-1 + 2)^2 = 1$; todėl $|\cos^2 x - 4\sin x - 9| \geq 5$.

Ats.: 5.

10. Trapecijos šoninių kraštinių ilgiai lygūs 24 ir 10, o kampai prie ilgesniojo pagrindo 35° ir 55°. Raskite atstumą tarp šios trapecijos pagrindų vidurio taškų.

Sprendimas. Sujunkime trapecijos $ABCD$ pagrindų vidurio taškus M ir N, o per tašką N nubrėžkime lygiagrečias su šoninėmis kraštinėmis atkarpas: $KN \| AD$ ir $LN \| BC$. Gausime statųjį trikampį KLN. Pagal Pitagoro teoremą $KL = \sqrt{KN^2 + LN^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$. Taškas M yra apibrėžto apie statųjį trikampį KLN apskritimo centras. Todėl $MN = \dfrac{1}{2}KL = 13$.



Ats.: 13.