ALYTAUS APSKRITIES XIV KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Varėna, 2009 gruodžio 22 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 9999 surašyti vienas greta kito (be skiriamųjų ženklų). Raskite gautojo natūraliojo skaičiaus

$$123456789101112...999799989999$$

skaitmenų sumą.

Sprendimas. Iš pradžių suporuokime skaitmenų grupes:

1 ir 9998; 2 ir 9997; 3 ir 9996; ...; 4999 ir 5000.

Kiekvienos poros skaitmenų suma lygi 36. Kadangi yra 4999 poros, tai bendra suporuotų skaitmenų suma bus 4999·36. Prie šio skaičiaus dar reikia pridėti keturių paskutiniųjų skaitmenų 9999 sumą, lygią 36. Taigi ieškomoji skaitmenų suma yra

$$4999 \cdot 36 + 36 = 36 \cdot 5000 = 180\,000.$$

Ats.: 180 000.

2. Raskite visus realiuosius skaičius x, su kuriais galioja lygybė

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1.$$

Sprendimas. Pažymėkime $u = 2^x$, $v = 3^x$. Gausime lygybę

$$u + v - u^2 + uv - v^2 = 1.$$

Iš čia

$$u + v - u^2 + uv - v^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2u^2 + 2v^2 + 2 - 2u - 2v - 2uv = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u^2 - 2uv + v^2) + (u^2 - 2u + 1) + (v^2 - 2v + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u - v)^2 + (u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 0.$$

Pastaroji lygybė galioja tik tada, kai $u - v = 0$, $u - 1 = 0$ ir $v - 1 = 0$; taigi tik tada, kai $u = v = 1$. Vadinasi, $x = 0$ yra vienintelis realusis skaičius, kuris tenkina lygybę $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$.

Ats.: 0.

3. Šimte dėžių buvo po vienodą detalių skaičių. Iš pirmos dėžės išimtos kelios detalės, iš antros – du kartus daugiau, iš trečios – tris kartus daugiau ir t. t. Iš 100-ios dėžės išimta 100 kartų daugiau detalių, negu iš pirmosios dėžės, ir šioje dėžėje liko tik viena detalė. Bendras visose dėžėse likusių detalių skaičius 14 950. Kiek detalių buvo kiekvienoje dėžėje?

Sprendimas. Tarkime, kad kiekvienoje dėžėje buvo po n yra detalių. Iš pirmos dėžės išimtų detalių skaičių pažymėkime x. Tada (pagal uždavinio sąlygą) $100x + 1 = n$ ir $(n - x) + (n - 2x) + (n - 3x) + ... + (n - 100x) = 14\,950$. Iš čia gauname:

$$(99x + 1) + (98x + 1) + (97x + 1) + ... + (x + 1) + 1 = 14\,950,$$
$$(99x + 98x + 97x + ... + x = 14950 - 100,$$
$$4950x = 14\,950,$$
$$x = 3.$$

Taigi $n = 100 \cdot 3 + 1 = 301$.

Ats.: 301.

4. Kubo viršūnėse yra po vieną skaičių: penkiose – nuliai, o vienoje – vienetas. Vienu veiksmu leidžiama pridėti po vienetą prie skaičių, esančių gretimose kubo viršūnėse (sujungtose ta pačia briauna). Ar tokiais veiksmais įmanoma pasiekti, kad skaičiai visose kubo viršūnėse pasidarytų lygūs?

Sprendimas. Pradinė visų šešių skaičių suma lygi 1. Po kiekvieno veiksmo ji padidėja dviem vienetais:

$$1 \to 3 \to 5 \to \ldots \to 2n-1;$$

taigi išlieka nelyginė.

Jeigu skaičiai visose viršūnėse būtų lygūs, tai sudėję juos, gautume lyginį skaičių.

Ats.: Neįmanoma.

5. Septynių natūraliųjų skaičių aibė A turi tokią savybę: bet kurių šešių skaičių suma dalijasi iš 5. Įrodykite, kad kiekvienas aibės A skaičius dalijasi iš 5.

Įrodymas. Aibės A skaičius pažymėkime $n_1, n_2, \ldots, n_7$. Tegu

$$a_1 = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7,$$
$$a_2 = n_1 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7,$$
$$a_3 = n_1 + n_2 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_7 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6.$$

Visų septynių skaičių sumą pažymėkime S. Tada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 6S.$$

Kadangi kiekvienas iš skaičių $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ dalijasi iš 5, tai ir jų suma dalijasi iš 5. Taigi $6S$ dalijasi iš 5. Tarkime, kad $S = 5m$ su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi m.

Pagal skaičių a_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, apibrėžimą gauname, kad n_i $n_i = S - a_i = 5m - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Vadinasi, n_i dalijasi iš 5.

6. Keltu, kraunamu tik džipais ir vilkikais, galima pervežti 109 tonų krovinį; džipo svoris – 3 tonos, o vilkiko – 5 tonos. Vieno džipo pervežimo kaina 60 litų, o vilkiko – 70 litų. Kaip reikia pakrauti keltą, kad gaunamos pajamos būtų didžiausios, kai vežamų vilkikų skaičius viršija džipų skaičių nemažiau kaip 20 procentų?

Sprendimas. Tegu x yra planuojamų krauti džipų, o y – vilkikų skaičius. Planuojamas pajamas pažymėkime P.

Pagal uždavinio sąlygą $P = 60x + 70y$, $3x + 5y \le 109$, $y \ge 1{,}2x$.

Iš apribojimų plano komponentėms x ir y gauname, kad

$$1{,}2x \le y \le 21{,}8 - 0{,}6x.$$

Vadinasi,

$$60x + 70 \cdot 1{,}2x \le P \le 60x + 70 \cdot (21{,}8 - 0{,}6x),$$
$$144x \le P \le 1526 + 18x.$$

Ši sąlyga galioja tik tada, kai $144x \le 1526 + 18x$; taigi, kai $x \le 12$.

Kai $x = 12$, gauname $14{,}4 \le y \le 14{,}6$. Tačiau y turi būti sveikasis skaičius; todėl atvejis $x = 12$ yra negalimas.

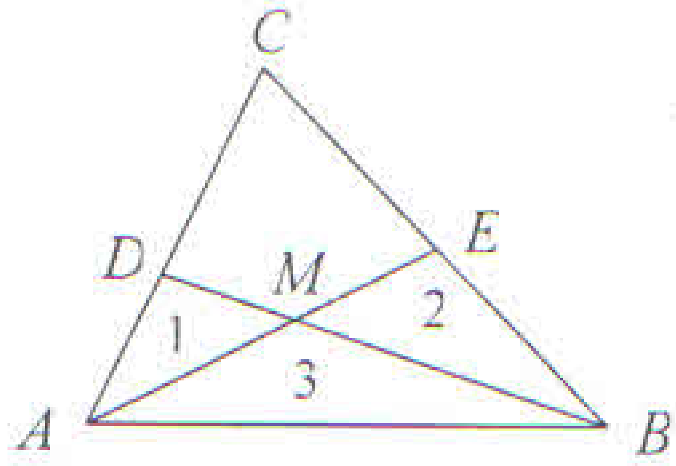
Kai $x = 11$, gauname $13{,}2 \le y \le 15{,}6$. Kadangi planuojamos pajamos turi būti galimai didžiausios, tai renkamės $y = 15$. Tada

$$P = 60 \cdot 11 + 70 \cdot 15 = 1710 \text{ (litų)}.$$

Kai $x \le 10$, gaunamos pajamos P būtų mažesnės už 1710 litų.

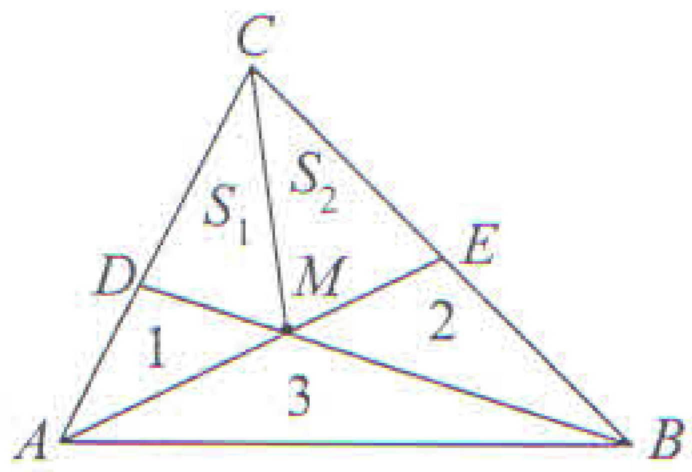
Ats.: 11 džipų ir 15 vilkikų.

7. Brėžinyje (žr. 1 pav.) nurodyti trikampio ABC trijų dalių plotai. Raskite ketvirtosios šio trikampio dalies $DMEC$ plotą.



1 pav.

Sprendimas. Ieškomąjį figūros $DMEC$ plotą pažymėkime S. Nubrėžkime atkarpą CM (žr. 2 pav.); gausime dar du trikampius, kurių plotus pažymėkime S_1 ir S_2. Atkarpa DM yra trikampių AMD ir DMC pagrindas, o MB – trikampių ABM ir MBC pagrindas. Todėl $\frac{S_1}{S_2+2}=\frac{1}{3}$.



2 pav.

Analogiškai (atkarpas AM ir ME laikydami ΔAMC ir ΔAMB bei ΔMEC ir ΔMEB pagrindais) gauname, kad $\frac{S_1+1}{S_2}=\frac{3}{2}$.

Plotų S_1 ir S_2 reikšmes randame iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} \frac{S_1}{S_2+2}=\frac{1}{3}, \\ \frac{S_1+1}{S_2}=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Gauname $S_1=\frac{8}{7}$, $S_2=\frac{10}{7}$; todėl $S=S_1+S_2=\frac{18}{7}$.

Ats.: $\frac{18}{7}$.

8. Skaičių x, y ir z trejetas $(x; y; z)$ yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=1 \end{cases}$$

sprendinys. Raskite mažiausią ir didžiausią x reikšmę.

Sprendimas. Gauname:

$$\begin{cases} y+z=2-x, \\ yz=1-x(y+z)=1-x(2-x); \end{cases}$$

todėl (pagal Vijeto teoremą) y ir z yra kvadratinės lygties

$$t^2-(2-x)t+1-x(2-x)=0$$

sprendiniai. Šios lygties diskriminantas yra

$$D=(x-2)^2-4(1-x(2-x))=4x-3x^2=x(4-3x);$$

jis neneigiamas, kai $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Ats.: 0 ir $\frac{4}{3}$.

9. Jeigu $(a+b+c)\cdot c<0$, tai $b^2>4ac$. Įrodykite.

Įrodymas. 1 būdas. Tegu $f(x)=x^2+bx+ac$. Tada

$$f(c)=c^2+bc+ac=c(c+b+a)<0.$$

Tai reiškia, kad kvadratinis trinaris $x^2+bx+ac$ turi dvi realias šaknis. Vadinasi, $D=b^2-4ac>0$; todėl $b^2>4ac$.

2 būdas.

$$(a+b+c)\,c=\frac{1}{4}(4ac+4bc+4c^2)=\frac{1}{4}((4ac-b^2)+(b^2+4bc+4c^2))=$$

$$=\frac{1}{4}((4ac-b^2)+(b+2c)^2)<0\Rightarrow 4ac-b^2<0\Rightarrow b^2>4ac.$$

10. Raskite triženklį skaičių, kurį padauginus iš 6, gaunamas triženklis skaičius su ta pačia skaitmenų suma.

Sprendimas. Tegu ieškomasis skaičius yra $\overline{xyz}$. Aišku, kad $x=1$, $y\le 6$.

Skaičius $6\cdot\overline{1yz}$ dalijasi iš 3, todėl skaitmenų suma $1+y+z$ irgi dalijasi iš 3; bet tada ir skaičius $\overline{1yz}$ dalijasi iš 3. Tai reiškia, kad $6\cdot\overline{1yz}$ dalijasi iš 9; todėl skaitmenų suma $1+y+z$ dalijasi iš 9.

Kadangi $1+y+z<18$, tai $1+y+z=9$. Galimi trejetai: 108, 117, 126, 135, 144, 153 ir 162. Uždavinio sąlygą tenkina tik 117 ir 135.

Ats.: 117 ir 135.