ALYTAUS APSKRITIES XVI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2012 m. lapkričio 24 d.

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+xy+x^2=9, \\ y+xy+y^2=-3. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję abi lygtis, gauname lygtį

$$x+y+(x+y)^2=6.$$

Iš čia $x+y=2$ arba $x+y=-3$.

Toliau spręskime dvi sistemas:

1) $\begin{cases} x+y=2, \\ x+xy+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x, \\ x+x(2-x)+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x, \\ 3x=9 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=-1;$

2) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x+xy+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3-x, \\ x+x(-3-x)+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3-x, \\ -2x=9 \end{cases} \Rightarrow x=-4{,}5,\ y=1{,}5.$

Ats.:(3; –1), (–4,5; 1,5).

2. Raskite visus sveikųjų skaičių x, y ir z, kurių suma lygi 2012, trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygybę

$$x^2+y^2+z^2=2(yz+1).$$

Sprendimas. Kadangi lygybę

$$x^2+y^2+z^2=2(yz+1)$$

galima užrašyti pavidalu

$$x^2+(y-z)^2=2,$$

tai lengva matyti, kad $x=\pm1$ ir $y-z=\pm1$. Vadinasi,

$$x+y+z=2012 \Rightarrow y+z=2012\pm1.$$

Toliau sprendžiame tokias sistemas:

$$\begin{cases} x=1, \\ y-z=\pm1, \\ y+z=2011 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y-z=\pm1, \\ y+z=2013. \end{cases}$$

Gauname tokius trejetus:
$(1;1006;1005)$, $(1;1005;1006)$, $(-1;1007;1006)$, $(-1;1006;1007)$.

Ats.: $(1;1006;1005)$, $(1;1005;1006)$, $(-1;1007;1006)$, $(-1;1006;1007)$.

3. Išspręskite lygtį

$$\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{7x}{x^2+5x+1}=1.$$

Sprendimas. Kadangi $x=0$ nėra sprendinys, tai padalinę skaitiklius ir vardiklius iš x, gauname ekvivalenčią lygtį

$$\frac{2}{x-1+\frac{1}{x}}-\frac{7}{x+5+\frac{1}{x}}=1.$$

Pasirinkę keitinį $t=x+\dfrac{1}{x}$, gauname lygtį

$$\frac{2}{t-1}-\frac{7}{t+5}=1.$$

Ji turi du sprendinius: $t_1 = -11$ ir $t_2 = 2.$ Toliau sprendžiame lygtis

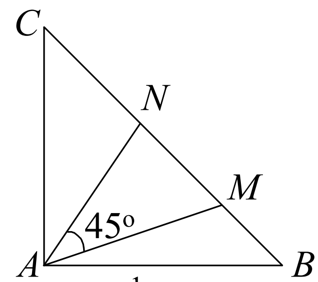
$$x + \frac{1}{x} = -11 \quad \text{ir} \quad x + \frac{1}{x} = 2.$$

Pirmoji turi du sprendinius:

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{117}}{2} \quad \text{ir} \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{117}}{2},$$

o antroji – vieną sprendinį – skaičių 1.

Ats.: 1, $\dfrac{-11 \pm \sqrt{117}}{2}$.



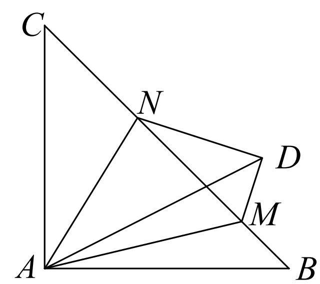
1 pav.

4. Lygiašonio stačiojo trikampio ABC įžambinėje BC pažymėti taškai M ir N (žr. 1 pav.) taip, kad $\angle MAN = 45^\circ$. Įrodykite, kad $MN^2 = BM^2 + NC^2$.

Įrodymas. Nubrėžkime atkarpą AD taip, kad $\angle MAD = \angle BAM$, $\angle DAN = \angle NAC$ ir $AD = AB = AC$ (žr. 2 pav.).

Tada

$$\Delta\, AMD = \Delta\, ABM,$$
$$\Delta\, ADN = \Delta\, ANC,$$
$$\angle\, ADM = \angle\, ABM = 45^\circ,$$
$$\angle\, ADN = \angle\, ACN = 45^\circ.$$



2 pav.

Vadinasi, trikampis MDN yra statusis ($\angle D = 90^\circ$). Pagal Pitagoro teoremą gauname, kad

$$MN^2 = MD^2 + ND^2.$$

Kadangi $MD = BM$ ir $ND = NC$, tai $MN^2 = BM^2 + NC^2$.

5. Skaičius a dalijasi iš 9; jį sudaro 2012 skaitmenų. Skaičius A yra skaičiaus a skaitmenų suma, skaičius B yra skaičiaus A skaitmenų suma, o C – skaičiaus B skaitmenų suma. Raskite skaičių C.

Sprendimas. Kadangi a dalijasi iš 9, tai A taip pat dalijasi iš 9. O tada iš 9 dalijasi ir B, ir C. Aišku, kad

$$9 \le A \le 2012 \cdot 9 = 18108;$$
$$9 \le B < 5 \cdot 9 = 45;$$
$$9 \le C < 2 \cdot 9 = 18.$$

Vadinasi, $C = 9$.

Ats.: 9.

6. Nustatykite, kokių 6-ženklių skaičių yra daugiau – tokių, kuriuos galima užrašyti dviejų triženklių skaičių sandauga, ar tokių, kurių taip užrašyti neįmanoma.

Sprendimas. Triženklių skaičių yra 900, o galimų porų skaičius lygus

$$\frac{900 \cdot 900}{2} = \frac{810\,000}{2} = 405\,000.$$

Be to, ne visų triženklių skaičių porų sandaugos yra 6-ženkliai skaičiai. Taigi 6-ženklių skaičių, kuriuos galima užrašyti dviejų triženklių skaičių sandauga, yra mažiau kaip 405 000.

Tuo tarpu 6-ženklių skaičių yra 900 000.

Vadinasi, daugiau yra tokių 6-ženklių skaičių, kurių neįmanoma užrašyti dviejų triženklių skaičių sandauga.

7. Kvadratas *ABCD* padalytas į 36 kvadratus. Vieno iš jų plotas nelygus vienetui, o kiekvieno kito plotas lygus vienetui. Raskite kvadrato *ABCD* plotą.

Sprendimas. Aišku, kad prie vienos kvadrato *ABCD* kraštinės yra tik vienetui lygaus ploto kvadratai; jų skaičių pažymėkime n. Taigi *ABCD* plotas lygus n^2.

Nelygaus vienetui ploto kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x ir spręskime lygtį

$$n^2 = 35 + x^2.$$

Skaičius x turi būti sveikasis skaičius, didesnis už vienetą. Be to, $x \le n-1$.

Vadinasi,

$$35 + 2^2 \le n^2 \le 35 + (n-1)^2,$$
$$39 \le n^2 \le n^2 - 2n + 36.$$

Iš čia gauname, kad $7 \le n \le 18$.

Skaičių $n^2 - 35$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas tik tada, kai $n = 18.$ Todėl kvadrato *ABCD* plotas lygus $18^2 = 324$.

Ats.: 324.

8. Lentoje buvo parašyti du vienodi skaičiai. Augustinas prie vieno iš jų prirašė 100 iš kairės, o prie kito 1 iš dešinės. Pirmasis skaičius pasidarė 37 kartus didesnis už antrąjį. Kokie skaičiai galėjo būti parašyti lentoje?

Sprendimas. Tegu $\overline{a_1a_2a_3...a_n}$ yra lentoje parašytas skaičius. Pagal sąlygą galima parašyti lygybę

$$\overline{100a_1a_2a_3...a_n} = 37 \cdot \overline{a_1a_2a_3...a_n1}.$$

Iš čia

$$\overline{a_1a_2a_3...a_n1} = \overline{100a_1a_2a_3...a_n} : 37.$$

Dalydami gauname pirmąjį dalmens skaitmenį 2. Taigi $a_1 = 2.$ Toliau dalydami gauname $a_2 = 7.$ Trečiasis dalmens skaitmuo 1. Čia galima ir sustoti, parašius atsakymą 27. Bet galima ir tęsti. Tada gautume tokius atsakymus: 2710027, 271002710027 ir t. t.

Ats.: 27, 2710027, 271002710027, ...

9. (Senovinis uždavinys). Trys seserys atėjo į turgų su viščiukais. Viena atnešė parduoti 10 viščiukų, antra 16, trečia 26. Prieš pietus jos pardavė dalį savo viščiukų viena ir ta pačia kaina. Po pietų, bijodamos, kad ne visi viščiukai bus parduoti, jos sumažino kainą ir likusius viščiukus pardavė vėl vienoda kaina. Namo visos trys grįžo su vienodomis pajamomis: kiekviena sesuo už savo viščiukus gavo 35 rublius. Kokia kaina seserys pardavė viščiukus prieš pietus ir po pietų.

Sprendimas. Tegu x, y ir z yra iki pietų parduotų viščiukų skaičiai. Tada $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$ yra po pietų parduotų viščiukų skaičiai. Jei p būtų viščiukų kaina prieš pietus, o q – viščiukų kaina po pietų, tai galėtume parašyti tokias lygybes:

$$px + q(10 - x) = 35,$$
$$py + q(26 - y) = 35,$$
$$pz + q(26 - z) = 35;$$

čia $1 \le x < 10,\ 1 \le y < 16,\ 1 \le z < 26,\ p > q.$

Tada

$$(p-q)x + 10q = 35,$$
$$(p-q)y + 16q = 35,$$
$$(p-q)z + 26q = 35.$$

Iš čia gauname:

$$(p-q)x = 35 - 10q,$$
$$(p-q)y = 35 - 16q,$$
$$(p-q)z = 35 - 26q.$$

Matome, kad

$$(p-q)x=(p-q)y+10q=(p-q)z+16q.$$

Vadinasi,

$$x=y+\frac{6q}{p-q}=z+\frac{6q}{p-q}.$$

Kadangi x, y ir z – natūralieji skaičiai, tai

$$\frac{6q}{p-q} \text{ ir } \frac{16q}{p-q}$$

turi būti natūralieji skaičiai. Jų skirtumas $\frac{4q}{p-q}$ taip pat natūralusis skaičius. O tada ir $\frac{2q}{p-q}$ turi būti natūralusis skaičius.

Tegu $n=\frac{2q}{p-q}$. Tada

$$x=y+3n=z+8n.$$

Iš sąlygų $x<10$ ir $z\geq 1$ nustatome, kad $n=1$ ir $z=1$. Todėl $x=9$, $y=6$.

Įrašę x, y ir z reikšmes į pradines lygybes, gauname tokią lygčių sistemą kainoms p ir q rasti:

$$\begin{cases} 9p+q=35, \\ 6p+10q=35, \\ p+25q=35. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $p=3{,}75$, $q=1{,}25$.

Ats.: 3,75 rublių ir 1,25 rublių.

10. Išspręskite lygtį

$$(x+1)^4+(x+3)^4=82.$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkome taip:

$((x+1)^4-81)+((x+3)^4-1)=0,$

$((x+1)^2-9)((x+1)^2+9)+((x+3)^2-1)((x+3)^2+1)=0,$

$((x+1)-3)((x+1)+3)(x^2+2x+10)+((x+3)-1)((x+3)+1)(x^2+6x+10)=0,$

$(x-2)(x+4)(x^2+2x+10)+(x+2)(x+4)(x^2+6x+10)=0,$

$(x+4)((x-2)(x^2+2x+10)+(x+2)(x^2+6x+10))=0,$

$(x+4)((x^3+6x-20)+(x^3+8x^2+22x+20))=0,$

$(x+4)(2x^3+8x^2+28x)=0,$

$2x(x+4)(x^2+4x+14)=0.$

Kadangi $x^2+4x+14>0$ su visais realiaisiais skaičiais x, tai gauname du realiuosius lygties sprendinius: $x_1=0$, $x_2=-4$.

Ats.: 0 ir –4.