ALYTAUS APSKRITIES XVII KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Butrimonys, 2013 m. lapkričio 30 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Jonas ir Petras grybavo – rinko baravykus ir raudonikius. Petro rastų grybų skaičius sudarė 55 procentus abiejų grybautojų rastų grybų skaičiaus. Jonas baravykų rado 25 procentais mažiau negu Petras, o Petras – 25 procentais mažiau raudonikių negu Jonas. Kiek grybų rado Jonas? Skaičiuodami turėkite mintyje, kad į Jono pintinę galėjo sutilpti ne daugiau kaip 100 grybų.

Sprendimas. Tegu x yra Petro rastų baravykų, o y – Jono rastų raudonikių skaičius. Pagal sąlygą Jonas rado $\frac{3}{4}x$ baravykų, o Petras rado $\frac{3}{4}y$ raudonikių. Iš viso Jonas rado $\frac{3}{4}x+y$ grybų, o Petras rado $x+\frac{3}{4}y$ grybų. Bendras grybų skaičius yra $\frac{7}{4}(x+y).$ Pagal uždavinio sąlygą gauname:

$$\begin{aligned} x+\frac{3}{4}y &= 0{,}55\cdot\frac{7}{4}(x+y),\\ 4x+3y &= 3{,}85(x+y),\\ 0{,}15x &= 0{,}85y,\\ 3x &= 17y. \end{aligned}$$

Matome, kad y turi dalytis iš 3. Be to, y turi dalytis ir iš 4 (nes $\frac{3}{4}y$ turi būti sveikasis skaičius). Taigi y turi dalytis iš 12. Todėl $y=12k,$ k – natūralusis skaičius. Tada $x=68k.$

Jei $k=1,$ tai $x=68,$ $y=12$ ir $\frac{3}{4}x+y=63.$

Jei $k>1,$ tai Jono rastų grybų skaičius būtų didesnis už 100.

Ats.: 63.

2. Šeimą sudaro trys asmenys – tėvas, motina ir sūnus. Šiuo metu jų amžių (metais) suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus šeimos narių amžių suma buvo 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

Sprendimas. Tegu x yra tėvo, y – motinos, o z – sūnaus amžius (dabar). Pagal pirmą uždavinio sąlygą gauname $x+y+z=65.$ O pagal antrą sąlygą gauname arba lygybę $x+y+z-27=40$ (jei sūnus jau buvo gimęs), arba lygybę $x+y-18=40$ (jei sūnus dar nebuvo gimęs). Iš pirmos lygybės gauname lygybę $x+y+z=67,$ prieštaraujančią sąlygai $x+y+z=65.$ Taigi prieš 9 metus sūnaus dar nebuvo. Iš antros lygybės išplaukia, kad

$$x+y=58.$$

Pagal trečią sąlygą gauname lygybę

$$x-4=9(z-4)\Rightarrow x-9z=-32.$$

Toliau sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z= 65,\\ x+y \qquad = 58,\\ x \qquad -9z=-32 \end{cases}$$

ir gauname, kad $x=31,$ $y=27,$ $z=7.$

Ats.: 31, 27 ir 7 metai.

3. Du dviratininkai vienu metu išvažiavo iš vietovių *A* ir *B* – vienas į *B*, o kitas į *A*. Abu važiavo pastoviais greičiais. Kai pirmasis dviratininkas nuvažiavo trečdalį kelio, antrajam iki pusiaukelės buvo likę 2,5 km. Kai antrasis atvyko į *A*, pirmajam iki *B* buvo likę 6 km. Koks atstumas tarp *A* ir *B*?

Sprendimas. Ieškomąjį atstumą pažymėkime *x*, o dviratininkų greičius v_1 ir v_2. Pagal uždavinio sąlygą galima sudaryti dvi lygtis:

$$\frac{\frac{1}{3}x}{v_1} = \frac{\frac{1}{2}x - 2{,}5}{v_2} \quad \text{ir} \quad \frac{x}{v_2} = \frac{x-6}{v_1}.$$

Pertvarkę jas, gausime tokią sistemą:

$$\begin{cases} 3(x-5)v_1 = 2xv_2, \\ xv_1 = (x-6)v_2. \end{cases}$$

Padaliję pirmą lygtį iš antros (kairę pusę dalykime iš kairės pusės, o dešinę – iš dešinės), gausime lygtį

$$\frac{3(x-5)}{x} = \frac{2x}{x-6},$$

o iš jos – kvadratinę lygtį $x^2 - 33x + 90 = 0,$ turinčią du sprendinius: $x_1 = 3, \quad x_2 = 30.$ Taigi atstumas tarp *A* ir *B* yra 30 km.
Ats.: 30 km.

4. Įrodykite, kad skaičius $p^2 - 1$ dalijasi iš 24, jei *p* yra didesnis už 3 pirminis skaičius.

Įrodymas. Aišku, kad *p* yra nelyginis skaičius. Todėl $p-1$ ir $p+1$ yra lyginiai skaičiai. Be to, jie yra gretimi lyginiai skaičiai; todėl vienas iš jų dalijasi iš 4. Vadinasi, skaičius $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ dalijasi iš 8.

Vienas iš trijų skaičių $p-1$, *p* ir $p+1$ turi dalytis iš 3. Kadangi *p* nesidalija iš 3, tai arba $p-1$, arba $p+1$ dalijasi iš 3. Vadinasi, skaičius $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ dalijasi ne tik iš 8, bet ir iš 3; taigi jis dalijasi iš 24.

5. Natūraliųjų skaičių *a*, *b* ir *c* suma lygi 2013. Įrodykite, kad natūralusis skaičius $n = \overline{abc}$, gaunamas prie skaičiaus *a* prirašius (iš dešinės) skaičių *b*, o paskui ir *c*, dalijasi iš 3.

Sprendimas. Skaičių *a*, *b*, *c* ir *n* skaitmenų sumas pažymėkime atitinkamai $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ ir $S(n)$.

Aišku, kad

$$S(n) = S(a) + S(b) + S(c) = ((S(a) - a) + (S(b) - b) + (S(c) - c) + (a + b + c) =$$
$$= ((S(a) - a) + (S(b) - b) + (S(c) - c) + 2013.$$

Kiekvienas šios sumos dėmuo dalijasi iš 3, todėl ir $S(n)$ dalijasi iš 3. Pagal dalumo iš 3 požymį skaičius $n = \overline{abc}$ dalijasi iš 3.

6. Raskite visas sveikųjų skaičių *x* ir *y* poras $(x;\, y)$, kurios tenkina lygybę

$$3xy - 3x + 2y - 16 = 0.$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkykime taip:

$$(3xy - 3x) + (2y - 2) - 14 = 0,$$
$$3x(y-1) + 2(y-1) = 14,$$
$$(3x+2)(y-1) = 14.$$

Iš čia

$$y = 1 + \frac{14}{3x+2}.$$

Kadangi skaičiaus 14 dalikliai yra $\pm 1, \pm 2, \pm 7$ ir ± 14, tai galimos $3x+2$ reikšmės tokios:

$$3x+2=\pm 1, \quad 3x+2=\pm 2, \quad 3x+2=\pm 7, \quad 3x+2=\pm 14.$$

Išsprendę visas lygtis, gauname keturias sveikąsias x reikšmes: –1, 0,–3, 4. Pagal jas apskaičiuojame y reikšmes ir gauname tokius sveikuosius lygties sprendinius: (–1; –13), (0; 8), (–3; –1), (4; 2).

Ats.: (–1; –13), (0; 8), (–3; –1), (4; 2).

7. Raskite, su kuria realiųjų skaičių x ir y pora $(x; y)$ reiškinio $5x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4$ reikšmė yra pati mažiausia.

Sprendimas. Reiškinį pertvarkykime taip:

$$5x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4 = (x^2 - 2xy + y^2) + (4x^2 - 4x + 1) - 5 = (x-y)^2 + (2x-1)^2 - 5.$$

Pirmųjų dėmenų mažiausios reikšmės lygios nuliui. Taigi turi galioti lygybės $x - y = 0$ ir $2x - 1 = 0$. Gauname $x = \frac{1}{2}$ ir $y = \frac{1}{2}$.

Ats.: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

8. Išspręskite lygtį

$$(4x+5)^2(2x+3)(x+1) = 1{,}5.$$

Sprendimas. Iš pradžių pertvarkykime lygtį:

$$(16x^2 + 40x + 25)(2x^2 + 5x + 3) = 1{,}5,$$

$$(8(2x^2 + 5x + 3) + 1)(2x^2 + 5x + 3) = 1{,}5.$$

Pažymėkime

$$t = 2x^2 + 5x + 3$$

ir spręskime lygtį

$$(8t+1)t = 1{,}5.$$

Gausime:

$$8t^2 + t - 1{,}5 = 0,$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{16} = \frac{-1 \pm 7}{16}.$$

Iš čia $t = -0{,}5$ arba $t = 0{,}375$. Tada reikia išspręsti dvi kvadratines lygtis:

$$2x^2 + 5x + 3 = -0{,}5 \text{ ir } 2x^2 + 5x + 3 = 0{,}375;$$

taigi lygtis

$$2x^2 + 5x + 3{,}5 = 0 \text{ ir } 2x^2 + 5x + 2{,}625 = 0.$$

Pirmoji lygtis sprendinių neturi, o antrosios sprendiniai yra –1,75 ir –0,75.

Ats.: –1,75; –0,75.

9. Apskaičiuokite reiškinio

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$$

reikšmę, jeigu $\frac{x}{x^2 + x + 1} = a$.

Sprendimas. Jei $a = 0$, tai $x = 0$ ir reiškinio reikšmė lygi 0.

Tegu $a \neq 0$. Tada

$$\frac{1}{a} = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}.$$

Iš čia

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1-a}{a}.$$

Todėl

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1-a}{a}\right)^2 - 1} = \frac{a^2}{1-2a}.$$

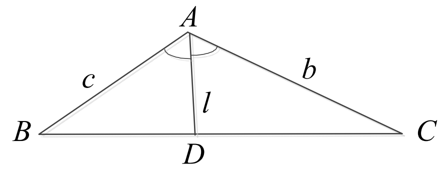
Ats.: $\frac{a^2}{1-2a}$.

10. Apskaičiuokite trikampio *ABC* kampo *A* didumą, jeigu galioja lygybė

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l},$$

kurioje *b* ir *c* yra kraštinių *AC* ir *AB* ilgiai, o *l* – kampo *A* pusiaukampinės ilgis.

Sprendimas. Kampo *A* didumą pažymėkime α. Trikampio *ABC* plotą pažymėkime *S*, o trikampių *ABD* ir *ADC* plotus – atitinkamai S_1 ir S_2. Aišku, kad $S_1 + S_2 = S$. Pagal ploto formulę gauname:



$$\frac{1}{2} cl \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} lb \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} cb \sin\alpha.$$

Iš čia

$$l = \frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Įrašę į lygybę $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l}$, gauname:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{2bc\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{b+c}{bc} = \frac{b+c}{2bc\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Todėl $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$ ir $\alpha = 120^\circ$.

Ats.: $\alpha = 120^\circ$.