# ALYTAUS APSKRITIES XVIII KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
# MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Lazdijai, 2014 m. gruodžio 6 d.

## UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

**1.** Matematikos konkurse dalyvavo 108 mokiniai. Jiems buvo išdalinta 480 popieriaus lapų. Kiekviena mergaitė gavo vienu lapu daugiau negu kiekvienas berniukas, o visos mergaitės gavo tiek pat lapų, kiek ir visi berniukai. Kiek mergaičių ir kiek berniukų dalyvavo matematikos konkurse?

*Sprendimas.* Tegu $x$ yra mergaičių skaičius, $y$ yra berniukų skaičius, o $z$ – berniuko gautų popieriaus lapų skaičius. Pagal sąlygą gauname:

$$x+y=108,\quad x(z+1)+yz=480,\quad x(z+1)=yz.$$

Toliau sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+y=108, \\ x(z+1)+yz=480, \\ x(z+1)=yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=108, \\ yz=240, \\ x(z+1)=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=108, \\ y=\dfrac{240}{z}, \\ x=\dfrac{240}{z+1}. \end{cases}$$

Iš čia gauname:

$$\frac{240}{z+1}+\frac{240}{z}=108 \Rightarrow \frac{20(2z+1)}{z(z+1)}=9 \Rightarrow 9z^2-31z-20=0 \Rightarrow z=4.$$

Tada $y=\dfrac{240}{4}=60,\ x=\dfrac{240}{5}=48.$

*Ats.:* 48 mergaitės ir 60 berniukai.

**2.** Kiškis pastebėjo vilką, kai jis nuo vilko buvo nutolęs 77 šuolių atstumu. Vilkas pradėjo vytis kiškį. Žinoma, kad per tą patį laiką kiškis padaro 13 šuolių, o vilkas – 9 šuolius; be to, 3 vilko šuoliai lygūs 8 kiškio šuoliams. Po kelių šuolių vilkas pavys kiškį?

*Sprendimas.* Tegu $x$ yra kiškio šuolio ilgis. Tada vilko šuolio ilgis yra $\dfrac{8}{3}x.$

Kiškio greitį pažymėkime $v_1$, vilko greitį pažymėkime $v_2$, o laiką, per kurį vilkas pavys kiškį, pažymėkime $t$. Pagal uždavinio sąlygą

$$\frac{13x}{v_1}=\frac{9\cdot\frac{8}{3}x}{v_2}.$$

Iš čia gauname, kad $v_2=\dfrac{24}{13}v_1.$ Per laiką $t$ kiškis papildomai nušuoliuos atstumą $v_1t,$ todėl per tą patį laiką $t$ vilkui teks nušuoliuoti atstumą $77x+v_1t.$ Iš lygybės

$$v_2t=77x+v_1t$$

gauname:

$$\frac{24}{13}v_1t=77x+v_1t,$$

$$v_1t=\frac{77x}{\frac{24}{13}-1}=\frac{13\cdot 77x}{11}=91x.$$

Taigi vilkas pavys kiškį padaręs

$$\frac{77x+91x}{\frac{8}{3}x}=\frac{168\cdot 3}{8}=63$$

šuolius.

*Ats.:* 63.

**3.** Raskite du triženklius skaičius, kurių suma dalijasi iš 504, o jų dalmuo dalijasi iš 6.

*Sprendimas.* Tegu $x$ ir $y$ yra triženkliai skaičiai, kurie tenkina uždavinio sąlygą. Tada iš sistemos

$$\begin{cases} x+y=504m, \ m\in N, \\ \frac{x}{y}=6n, \ n\in N, \\ 100\le x\le 999, \\ 100\le y\le 999 \end{cases}$$

gauname, kad

$$x+y=6ny+y\ge 600+100=700$$

ir

$$x+y=x+\frac{x}{6n}\le x+\frac{x}{6}\le 999+\frac{999}{6}<999+167=1166.$$

Iš dvigubos nelygybės $700\le x+y\le 1165$ gauname dvigubą nelygybę $700\le 504m\le 1165$, o iš jos – vienintelę $m$ reikšmę $m=2$.

Vadinasi, $x+y=1008$.

Toliau

$$x+y=1008\Rightarrow 6ny+y=1008\Rightarrow y=\frac{1008}{6n+1}\Rightarrow n=1,\ y=144\Rightarrow x=864.$$

*Ats.:* 864 ir 144.

**4.** Teigiami realieji skaičiai $a$ ir $b$ tenkina nelygybę $a+b+1=3ab$. Įrodykite, kad $a\cdot b\ge 1$.

*Įrodymas.* Iš lygybės $a+b+1=3ab$ ir sąlygos $a>0,\ b>0$ gauname:

$$3ab=a+b+1=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}+1\ge 2\sqrt{ab}+1.$$

Taigi $3ab-2\sqrt{ab}-1\ge 0$.

Pažymėję $t=\sqrt{ab}$, gausime kvadratinę nelygybę $3t^2-2t-1\ge 0$.

Kadangi kvadratinio trinario $3t^2-2t-1$ šaknys yra $-\frac{1}{3}$ ir 1, tai nelygybė galios tik tada, kai $t\ge 1$ (nes $t>0$). Vadinasi,

$$\sqrt{ab}\ge 1\ \Rightarrow\ ab\ge 1.$$

**5.** Kvadratinio trinario $f(x)=ax^2+bx+c$ koeficientai $a$, $b$ ir $c$ yra sveikieji skaičiai; be to, $c$ yra nelyginis skaičius. Šio kvadratinio trinario šaknys yra sveikieji skaičiai. Nustatykite, ar $f(2015)$ gali būti nelyginis skaičius.

*Sprendimas.* Tegu $x_1$ ir $x_2$ yra kvadratinio trinario šaknys. Pagal Vijeto teoremą $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Iš čia $c=ax_1x_2$. Kadangi $c$ yra nelyginis skaičius, tai $a$, $x_1$ ir $x_2$ yra nelyginiai skaičiai.

Kita vertus, $b = -a(x_1 + x_2)$ yra lyginis skaičius. Todėl

$$f(2015) = a \cdot 2015^2 + b \cdot 2015 + c$$

yra lyginis skaičius, nes pirmas ir trečias dėmuo yra nelyginiai skaičiai, o antras dėmuo yra lyginis skaičius.

*Ats.:* negali.

**6.** Tiesės $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ ir $y = k_3x + b_3$ yra parabolės $y = x^2$ liestinės. Įrodykite, kad $b_3 \ge 2(b_1 + b_2)$, jeigu $k_3 = k_1 + k_2$.

*Įrodymas*. Jeigu tiesė $y = kx + b$ yra parabolės $y = x^2$ liestinė, tai lygtis $kx + b = x^2$ turi vienintelį sprendinį, t. y. $D = k^2 + 4b = 0$.

Vadinasi, $4b_1 = -k_1^2$, $4b_2 = -k_2^2$ ir $4b_3 = -k_3^2$. Iš čia gauname:

$$4b_3 = -k_3^2 = -(k_1 + k_2)^2 = -k_1^2 - 2k_1k_2 - k_2^2 = -2k_1^2 - 2k_2^2 + (k_1 - k_2)^2 \ge -2k_1^2 - 2k_2^2 = 8b_1 + 8b_2.$$

Iš čia $b_3 \ge 2(b_1 + b_2)$.

**7.** Žinoma, kad $y \ne 0$, $|y| \ne 1$ ir $x_1 = \frac{y-1}{y+1}$, $x_2 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}$, $x_3 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1}, \ldots$

Raskite $y$, jei $x_{2014} = 3$.

*Sprendimas*. Įrašę $x_1 = \frac{y-1}{y+1}$ į lygybę $x_2 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}$, gauname, kad $x_2 = -\frac{1}{y}$. Tada $x_3 = \frac{y+1}{1-y}$ ir $x_4 = y$. Matome, kad $x_5 = x_1$, $x_6 = x_3$, $x_7 = x_3$, $x_8 = x_4$, $x_9 = x_1$ ir t. t.

Kadangi $2014 = 4 \cdot 503 + 2$, tai $x_{2014} = x_2 = -\frac{1}{y} = 3$, tai $y = -\frac{1}{3}$.

*Ats.:* $-\frac{1}{3}$.

**8.** Išspręskite lygtį

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0.$$

*Sprendimas*. Kadangi

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = (x^4 + x^2) - (x^3 + x) - (6x^2 + 6) =$$
$$= x^2(x^2 + 1) - x(x^2 + 1) - 6(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 6),$$

tai $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ tik tada, kai $x^2 - x - 6 = 0$. Lygtis $x^2 - x - 6 = 0$ turi du sprendinius: –2 ir 3.

*Ats.:* {–2; 3}.

**9.** Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{3xy}{x+y} = 8, \\ \frac{5yz}{y+z} = 12, \\ \frac{7zx}{z+x} = 24. \end{cases}$$

*Sprendimas*. Aišku, kad $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir $z \neq 0$. Pirmos lygties kairės pusės skaitiklį ir vardiklį padalykime iš *xy*, antros – iš *yz*, o trečios – iš *zx*. Gausime sistemą

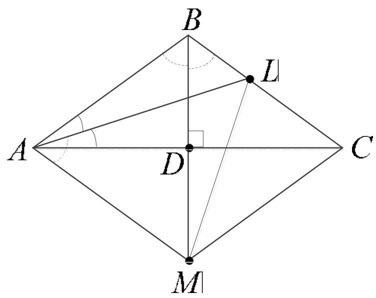
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{24}. \end{cases}$$

Iš čia $x=8$, $y=4$, $z=6$,

*Ats.:* (8; 4; 6).

**10.** Lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės, yra perpus trumpesnė už kampo prie pagrindo pusiaukampinę. Apskaičiuokite trikampio kampus.

*Sprendimas.* Pagal uždavinio sąlygą $AL=2BD$. Aišku, kad $BD \perp AC$. Nubrėžkime $AM \parallel BC$, $CM \parallel AB$ ir gausime rombą *ABCM*. Sujungę *M* ir *L*, gausime lygiašonę trapeciją *ABLM* (nes jos įstrižainės *AL* ir *MB* lygios). Vadinasi, $\angle LBM = \angle BMA = \angle LAM$.




Kadangi

$$\angle ABD + \angle BAC = 90^\circ \text{ ir } \angle ABD = \angle LAM = \frac{3}{2}\angle BAC,$$

tai iš lygybės

$$\frac{3}{2}\angle BAC + \angle BAC = 90^\circ$$

gauname, kad $\angle BAC = 36^\circ$.

Taigi $\angle ABC = \angle BCA = 36^\circ$, $\angle ABC = 108^\circ$,

*Ats.:* $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.