

## Atrankos užduotys

1. Duota lygtis

$$x^3 + x^2 = 2^y + 16.$$

- (A) Nurodykite kokią nors vieną tos lygties sveikųjų teigiamų sprendinių  $x$  ir  $y$  porą  $(x; y)$ ;
- (B) Raskite visas (likusias) tos lygties sveikųjų teigiamų sprendinių poras  $(x; y)$ , jeigu jų apskritai esama, arba įrodykite, kad daugiau (jokių) sprendinių nėra.

2. Iš trijų vienetinių kvadratėlių sudėtą nepilną  $2 \times 2$  kvadratą vadinsime *kampeliu*, o stačiakampį, įprastiniu būdu (be tarpų ir be persidengimų) sudėliojamą iš tokių *kampelių*, laikysime *sėkmingu*.

Pavyzdžiui,  $2 \times 3$  stačiakampis yra *sėkmingas*, nes jis yra sudarytas iš dviejų tokių *kampelių*.

- (A) Ar stačiakampis  $6 \times 3$  yra *sėkmingas*?
- (B) Ar stačiakampis  $9 \times 3$  yra *sėkmingas*?
- (C) Nurodykite visus galimus *sėkmingų* stačiakampių matmenis.

3. Trikampio  $\triangle ABC$  kampas  $\angle A$  yra lygus  $30^\circ$ , o taškai  $S$  ir  $I$  yra atitinkamai apie jį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimo centrai. Kraštinėse  $BA$  ir  $CA$  atitinkamai yra pažymėti tokie taškai  $D$  ir  $E$ , kad

$$BD = CE = BC.$$

Įrodykite, kad  $SI$  yra statmena ir lygi  $DE$ .

ATRANKOS KONTROLINIS DARBAS  
VILNIUS, 2009-07-08

1. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

sprendinius realiaisiais skaičiais  $a, b, c, d$  ir  $e$ .

2. Taškas  $I$  yra į trikampį  $ABC$ , kuriame  $AB \neq AC$ , įbrėžto apskritimo centras. Tiesės  $BI$  ir  $CI$  kerta to trikampio kraštines  $AC$  ir  $AB$  atitinkamai taškuose  $D$  ir  $E$ . Koks galėtų būti to trikampio kampo  $BAC$  didumas, kuriam esant  $DI = EI$ ?

3. Kokią pačią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

jeigu  $x, y$  ir  $z$  yra tokie realieji skaičiai, kad

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1?$$