

**ATRANKA Į PASAULINĘ IR VIDURIO EUROPOS MATEMATIKOS
OLIMPIADAS**

**Vilniaus universitetas
2010 balandžio 10-11 d.**

Pirmoji diena

1. Kvadratas 8×8 padalytas į 64 vienetinius kvadratėlius. Į kiekvieną kvadratėlį įrašytas arba skaičius 1, arba skaičius -1 . Gautoje skaičių lentelėje bet kurio kvadrato 2×2 keturių skaičių suma lygi arba 2, arba -2 . Įrodykite, kad lentelėje yra dvi eilutės, kuriose tie patys skaičiai yra įrašyti ta pačia tvarka.
2. Teigiami skaičiai (a, b, c) tenkina nelygybę

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 5 + 3\sqrt{2}.$$

Įrodykite, kad (a, b, c) yra smailiojo trikampio kraštinės.

3. Nelygiakraščio trikampio ABC kraštinės tenkina lygybę $AB = (AC + BC)/2$. Jo pusiauakraštinės kertasi taške M , o pusiauakampinės – taške I . Tiesės AM ir BI kertasi taške P , o tiesės BM ir AI – taške Q . Įrodykite, kad tiesė PQ eina per atkarpos IM vidurio tašką.

Darbo trukmė: 4 val.

Antroji diena

4. Rombo $ABCD$ įstrižainėje AC ir kraštinėje BC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad $DM = MN$. Tiesės AC ir DN kertasi taške P , o tiesės AB ir DM – taške R . Įrodykite, kad $RP = PD$.
5. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (x, y, u) , tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = u + 12; \\ x^5 + y^5 = u^5 + 12. \end{cases}$$

6. Funkcija f apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir įgyja realiąsias reikšmes. Įrodykite, kad egzistuoja tokie realieji skaičiai x ir y , kad

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$

Darbo trukmė: 4 val.