Atranka į 2014 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2014 04 18

1. Lygiagretainio $ABCD$ kraštines AB, BC ir CD apskritimas liečia atitinkamai taškuose K, L ir M. Iš viršūnės C į AB nubrėžtas statmuo. Įrodykite, kad tiesė KL šį statmenį dalija pusiau.

2. Baigtinė aibė A pasižymi tokia savybe: bet kurių 6 skirtingų jos elementų suma nesidalija iš 6.
   a) Raskite bent vieną tokią aibę A, sudarytą iš 10 skirtingų natūraliųjų skaičių.
   b) Ar egzistuoja tokia aibė A, sudaryta iš 11 skirtingų natūraliųjų skaičių?

3. Duoti tokie teigiami realieji skaičiai a, b ir c, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = 1, \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

turi vienintelį realųjį sprendinį (x, y, z). Įrodykite, kad egzistuoja trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra a, b ir c.

Antroji diena, 2014 04 19

4. a) Ar egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad skaičiaus 2^n paskutinis skaitmuo yra 6, o kitų skaitmenų suma yra lygi 2?
   b) Ar egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a ir $m \geqslant 3$, kad skaičiaus a^m paskutinis skaitmuo yra 6, o kitų skaitmenų suma yra lygi 3?

5. Duoti realieji skaičiai x ir y. Pažymėkime $s_1 = x + y$, $s_2 = x^2 + y^2$, $s_3 = x^3 + y^3$, $s_4 = x^4 + y^4$ ir $t = xy$.
   a) Įrodykite, kad skaičius t yra racionalusis, jei s_2, s_3 ir s_4 yra racionalieji skaičiai.
   b) Įrodykite, kad skaičius s_1 yra racionalusis, jei s_2, s_3 ir s_4 yra racionalieji skaičiai.
   c) Ar skaičius s_1 gali būti iracionalusis, jei s_2 ir s_3 yra racionalieji skaičiai?

(Realusis skaičius r yra vadinamas *racionaliuoju*, jei jį galima užrašyti dviejų sveikųjų skaičių p ir q santykiu $\frac{p}{q}$, pavyzdžiui, $\frac{3}{2}$, $-\frac{17}{3}$, 4, 0 ir pan. Priešingu atveju, t. y. jei r taip išreikšti neįmanoma, jis yra vadinamas *iracionaliuoju*, pavyzdžiui, $\sqrt{5}$.)

6. Apskritimai ω_1 ir ω_2 nesikerta. Nubrėžtos jų bendros išorinės liestinės a ir b bei bendra vidinė liestinė c. Tiesės a, b ir c liečia apskritimą ω_1 atitinkamai taškuose A_1, B_1 ir C_1, o apskritimą ω_2 – atitinkamai taškuose A_2, B_2 ir C_2. Įrodykite, kad trikampių $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ plotų santykis yra lygus apskritimų ω_1 ir ω_2 spindulių santykiui.