Atranka į 2015 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas
Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Duoti du besiliečiantys apskritimai α ir β. Bendra apskritimų liestinė liečia α ir β atitinkamai (skirtinguose) taškuose A ir B. Atkarpa AP yra apskritimo α skersmuo, o tiesė, einanti per tašką P, liečia β taške Q. Įrodykite, kad $AP = PQ$.

   Sprendimas. Apskritimų spindulius atitinkamai pažymėkime r_1 ir r_2, o jų centrus – O_1 ir O_2. (Laikykime, kad $r_1 \leqslant r_2$.) Nuleiskime statmenis iš apskritimų centrų į AP ir BO_2 ir tris kartus pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$O_1O_2^2 = (r_1 + r_2)^2 = (r_2 - r_1)^2 + AB^2,$$

$$PO_2^2 = (2r_1 - r_2)^2 + AB^2 = r_2^2 + PQ^2.$$

   Iš šių lygybių išplaukia, kad $AB^2 = 4r_1r_2$ ir todėl $PQ^2 = (2r_1)^2 = PA^2$. (Kai $r_1 = r_2$ arba $2r_1 = r_2$, statieji trikampiai išsigimsta, bet lygybės lieka teisingos – kaip ir tuo atveju, kai $r_1 > r_2$.)

2. Raskite visus lygties

$$a! \cdot b! = a! + b! + c!$$

   natūraliuosius sprendinius (a, b, c).
   (Čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, pavyzdžiui, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

   Sprendimas. Jei turime natūraliuosius skaičius $x \leqslant y$, tai $y!/x!$ yra natūralusis skaičius, o jei $x > y$, tai $x! > y!$ ir skaičius $y!/x!$ nėra sveikasis.

   Tegu $a \leqslant b$. (Atvejis $b \leqslant a$ analogiškas.) Pastebėkime, kad lygtis neturi sprendinių, kai $a = 1$, nes tada jos kairioji pusė yra mažesnė už dešiniąją. Padalijęlygtį iš $a!$, gauname, kad $b! - 1 - b!/a! = c!/a!$ yra sveikasis skaičius, todėl $c \geqslant a > 1$.

   Tarkime, kad $b \geqslant c + 1$. Tada $(c + 1)!$ dalija $b!(a! - 1) = a! + c!$ ir

$$2c! \geqslant a! + c! \geqslant (c + 1)!.$$

Vadinasi, $2 \geqslant c+1$ ir $c=1$, prieštara. Taigi $c \geqslant b \geqslant a > 1$.

Padaliję pradinę lygtį iš $b!$, gauname, kad $a! - 1 - c!/b! = a!/b!$ yra sveikasis skaičius. Todėl $b \leqslant a$. Taigi $a = b$ ir belieka išspręsti lygtį

$$c! = (a!)^2 - 2a!.$$

Kai $a = 2$ ir $a = 4$, lygtis sprendinių neturi, o kai $a = 3$, gauname, kad $c = 4$. Nesunku įsitikinti, kad $(a, b, c) = (3, 3, 4)$ yra pradinės lygties sprendinys.

Išnagrinėsime atvejį $c \geqslant a \geqslant 5$. Tada

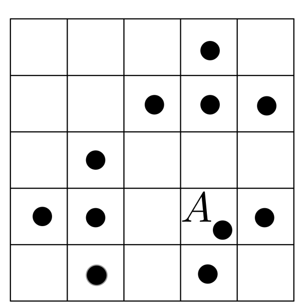
$$c!/a! + 2 = a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$$

dalijasi iš 3. Jei $c \geqslant a+3$, tai $c!/a! = (a+1) \cdot (a+2) \cdot (a+3) \cdot \ldots \cdot c$ dalijasi iš 3, nes sandaugoje yra 3 iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Taigi $c!/a!+2$ nesidalija iš 3, prieštara. Likę galimi atvejai yra $c = a+2$, $c = a+1$ arba $c = a$.

Jei $c = a+2$, tai $a! = c!/a! + 2 = a^2 + 3a + 4$ ir a dalija 4. Tai neįmanoma, kadangi $a \geqslant 5$. Jei $c = a+1$, tai $a! = c!/a! + 2 = a+3$ ir $a \geqslant 5$ dalija 3. Prieštara. Galiausiai, jei $c = a$, tai $a! = 3$, vėl prieštara. Kitų galimybių nėra.

Atsakymas: $(a, b, c) = (3, 3, 4)$.

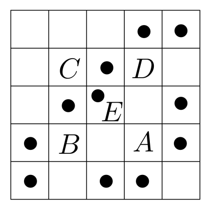
3. Duota 5×5 lentelė su šviesti galinčiais langeliais. Liečiant langelius, galima keisti jų būseną: šviečiančius užgesinti, o nešviečiančius vėl uždegti. Palietus bet kurį langelį, pakinta ne tik jo, bet ir visų gretimų (bendrą kraštinę su juo turinčių) langelių būsenos. Pradžioje visi lentelės langeliai užgesinti, o Hermina nori, kad lentelėje šviestų lygiai vienas langelis. Pavyzdžiui, jei Hermina kokia nors tvarka paliestų paveikslėlyje pažymėtus langelius, tai ji uždegtų vienintelį langelį A, o visi kiti liktų užgesinti.



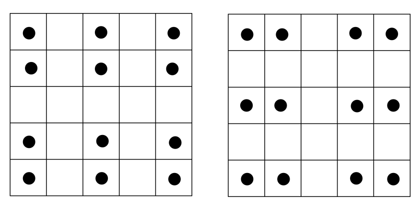
a) Raskite dar keturis langelius, kurie gali tapti tuo vieninteliu pabaigoje šviečiančiu langeliu.

b) Įrodykite, kad joks iš lentelės likusių 20 langelių negali tapti tuo vieninteliu pabaigoje šviečiančiu langeliu.

Sprendimas. a) Akivaizdu, kad pagal simetriją tinka dar 3 langeliai B, C ir D (atitinkami pavyzdžiai gaunami tiesiog pasukus lentelę). Ketvirtasis yra vidurinis langelis E: jis užsidega, palietus kokia nors tvarka šiuos taškais pažymėtus langelius:



b) Nesunku įsitikinti, kad bet kurio lentelės langelio palietimas keičia lyginio skaičiaus pažymėtų langelių būseną tiek kairėje lentelėje, tiek dešinėje:



Abiem atvejais šviečiančių pažymėtų langelių skaičiaus lyginumas nekis: arba lyginis pažymėtų langelių skaičius užsidegs ir lyginis užges, arba nelyginis užsidegs ir nelyginis užges. Pradžioje šviečiančių langelių skaičius yra 0 (lyginis). Taigi abiem atvejais šviečiančių pažymėtų langelių skaičius visada ir liks lyginis. Pažymėtų langelių gali šviesti arba 0, arba bent 2, bet niekada lygiai 1 langelis. Taip atmetame visus 20 raidėmis nepažymėtų langelių.

Atsakymas: a) langeliai B, C, D, E.

4. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$

su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.
(Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

Sprendimas. Įrašome $y = 0$. Tada

$$f(x)(f(0) - 1) = 0.$$

Atvejis $f(x) \equiv 0$ netinka, nes lygybė $0 = 0 + xy$ negalioja su, pavyzdžiui, $x = y = 1$. Taigi $f(x) \neq 0$ su bent vienu $x \in \mathbb{R}$. Vadinasi, $f(0) = 1$.

Įrašome į pradinę lygybę $x = 1, y = -1$. Gauname

$$f(1)f(-1) = f(0) + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Vadinasi, $f(1) = 0$ arba $f(-1) = 0$.

Jei $f(1) = 0$, tai įrašome į pradinę lygybę $y = 1$ ir $x - 1$ vietoj x. Gausime $0 = f(x-1)f(1) = f(x) + x - 1$, todėl $f(x) = 1 - x$ (kiekvienam x). Nesunku įsitikinti, kad funkcija $f(x) \equiv 1 - x$ tenkina pradinę lygybę: $(1 - x)(1 - y) = 1 - x - y + xy$.

Jei $f(-1) = 0$, tai įrašome $y = -1$ ir $x + 1$ vietoj x. Gausime $0 = f(x+1)f(-1) = f(x) + (x+1) \cdot (-1)$, todėl $f(x) = 1 + x$. Analogiškai įsitikiname, kad funkcija $f(x) \equiv 1 + x$ tenkina pradinę lygybę: $(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$.

Atsakymas: $f(x) \equiv 1 - x$ ir $f(x) \equiv 1 + x$.

5. Aibės A ir B yra natūraliųjų skaičių aibės $\{1, 2, 3, \dots\}$ poaibiai, pasižymintys tokiomis dviem savybėmis:
   a) Bet kurių dviejų skirtingų aibės A elementų x ir y suma $x + y$ priklauso aibei B.
   b) Bet kurių dviejų skirtingų aibės B elementų z ir t santykis $\frac{z}{t}$ (didesnį skaičių z dalijant iš mažesnio t) priklauso aibei A.

   Kiek daugiausiai elementų gali turėti aibių sąjunga $A \cup B$?
   (Aibę $A \cup B$ sudaro elementai, priklausantys bent vienai iš dviejų aibių A ir B.)

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad uždavinio sąlygą tenkina aibės $A = \{2, 4\}$ ir $B = \{3, 6, 12\}$. Tada aibei $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ priklauso 5 elementai. Įrodysime, kad daugiau jų būti negali.

Jei aibei A priklauso bent 3 elementai $a < b < c$, tai aibei B priklauso trys skaičiai $a + b < a + c < b + c$. Tada skaičius $a + b$ be liekanos dalija skaičius $a + c$, $b + c$, taigi ir jų skirtumą $b - a > 0$. Tačiau taip būti negali, kadangi $b - a < a + b$. Taigi aibėje A yra daugiausiai 2 elementai.

Jei aibėje B yra bent 4 elementai $a < b < c < d$, tai aibėje A yra bent 3 elementai $d/a > d/b > d/c$, prieštara. Taigi aibėje B yra daugiausiai 3 elementai, o per abi aibes yra ne daugiau kaip $2 + 3 = 5$ elementai.

Atsakymas: 5.

6. Duotas lygiagretainis $ABCD$ su centru S. Trikampio ABD įbrėžtinis apskritimas su centru O liečia BD taške T. Įrodykite, kad tiesės OS ir CT yra lygiagrečios.

Sprendimas. Tegu $AB = a$, $AD = b$ ir $BD = c$. Tegu $a > b$. (Atvejis $a < b$ yra analogiškas, o atvejis $a = b$ trivialus.) Pažymėkime tašką T', simetrišką taškui T taško S atžvilgiu. Tegu AE yra trikampio ABD pusiaukampinė. Tada DO – kitos pusiaukampinės atkarpa.

Kadangi įbrėžtinis apskritimas liečia kraštinę taške T, tai

$$BT' = DT = \frac{b + c - a}{2}.$$

(Šia lygybe galima įsitikinti taip: jei ABD įbrėžtinis apskritimas liečia AB taške F ir AD taške G, tai, pažymėję $DT = DG = x$, $BT = BF = y$ ir $AF = AG = z$, turime $y + z = a$, $z + x = b$ ir $x + y = c$. Tada $a = b + c - 2x$ ir belieka išreikšti $x = DT$.) Vadinasi,

$$T'S = BS - BT' = \frac{c}{2} - BT' = \frac{a - b}{2}.$$

Pagal pusiaukampinės savybę trikampiui ABD turime

$$\frac{a}{b} = \frac{c - DE}{DE},$$

todėl

$$DE = \frac{bc}{a + b}.$$

Pagal pusiakampinės savybę trikampiui ADE gauname

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AD}{DE} = \frac{b}{DE} = \frac{b(a + b)}{bc} = \frac{a + b}{c}.$$

Vadinasi,

$$SE = DS - DE = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a + b} = \frac{c(a - b)}{2(a + b)} = T'S \cdot \frac{c}{a + b},$$

todėl $SE : T'S = OE : AO$. Pastarasis atkarpų proporcingumas ir bendras kampas E įrodo, kad trikampiai OES ir AET' yra panašūs. Vadinasi, jų atitinkami kampai lygūs ir todėl kraštinės OS bei AT' yra lygiagrečios. Kita vertus, tiesė AT' yra lygiagreti su tiese CT, kadangi lygiagretainio viršūnės A ir C bei taškai T ir T' yra simetriški lygiagretainio centro S atžvilgiu. Vadinasi, tiesės OS ir CT yra lygiagrečios.

Antras sprendimas (A. Novikas). Tegu TT'' yra įbrėžtinio apskritimo skersmuo, o tiesės AT'' ir BD kertasi taške T'. Homotetija su centru taške A, tašką T'' atvaizduojanti į tašką T', įbrėžtinį apskritimą atvaizduoja į apskritimą, liečiantį kraštines AD ir AB. Jo skermens, statmeno kraštinei BD, vienu iš galų lieka T', todėl apskritimas liečia ir BD. Taip gauname trikampio ABD pribrėžtinį apskritimą. Pribrėžtinio apskritimo lietimosi su kraštine taškas dalija ją į to paties ilgio atkarpas, kaip ir įbrėžtinio apskritimo lietimosi taškas (nežinant šio fakto, jį galima įrodyti panašiai kaip lygybę $DT = (b+c-a)/2$ pirmajame sprendime – per apskritimo liestinių, išvestų iš vieno taško, atkarpų ilgių lygybę). Mūsų atveju $BT' = DT$ ir todėl $ST = ST'$. Kadangi $OT = OT''$ ir $ST = ST'$, tai atkarpa OS yra trikampio $TT'T''$ vidurio linija ir todėl lygiagreti su tiese $T'T'' = AT'$. Kaip ir pirmajame sprendime, OS lygiagreti ir su CT dėl AT' ir CT simetrijos taško S atžvilgiu.

Trečias sprendimas (A. Novikas). Pažymėkime tašką T', kaip ir pirmajame sprendime. Atkarpai AT' priklauso trikampio ABD Nagelio taškas N. Pagal Nagelio tiesės savybes, trikampio ABD pusiaukraštinė AS ir Nagelio tiesė ON kertasi centroide M ir $MN = 2MO$. Pagal pusiaukraštinės savybę, $AM : MS = 2 = MN : MO$. Be to, kampai OMS ir NMS lygūs (kryžminiai). Todėl trikampiai OMS ir NMS panašūs, jų kampai OSM ir MAN lygūs, o tiesės OS ir $AN = AT'$ lygiagrečios. Kaip ir pirmajame sprendime, OS lygiagreti ir su CT dėl AT' ir CT simetrijos taško S atžvilgiu. Daugiau apie Nagelio tiesę: http://mathworld.wolfram.com/NagelLine.html