# Atranka į 2016 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

## Pirmoji diena, 2016 04 02

1. Šachmatų figūra rikis ėjimo metu gali būti perkelta iš vieno $8 \times 8$ lentos langelio į kitą, jei tie langeliai yra vienoje įstrižainėje. Taigi rikis gali judėti keturiomis kryptimis. Figūra *šmikis* juda kaip ir rikis, bet gali judėti tik trimis iš tų keturių krypčių (trūkstama kryptis dviem šmikiams gali skirtis). Kiek daugiausiai šmikių galima pastatyti ant $8 \times 8$ lentos taip, kad vienu ėjimu joks šmikis negalėtų nukirsti kito?

2. Raskite visus lygties
$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1$$
natūraliuosius sprendinius $(a, b, c, d)$.

3. Smailiojo nelygiakraščio trikampio $ABC$ aukštinė $CK$ kertasi su kitomis dviem aukštinėmis taške $H$. Kraštinėje $AB$ pažymėtas toks taškas $D$, kad atkarpa $CD$ eina per trikampio $ABC$ apibrėžtinio apskritimo centrą $O$. Taškas $E$ dalija atkarpą $CD$ pusiau. Įrodykite, kad tiesė $EK$ dalija atkarpą $OH$ pusiau.

## Antroji diena, 2016 04 03

4. Nubrėžtos trikampio $ABC$ aukštinė $AD$ ir pusiaukampinė $AL$. Jo apibrėžtinis apskritimas $\omega$ kerta tiesę $AL$ taške $M \neq A$, tiesę $MD$ – taške $N \neq M$, o tiesę $NL$ – taške $E \neq N$. Įrodykite, kad $AE$ yra $\omega$ skersmuo.

5. Kiekvienoje kubo sienoje įrašyta po sveikąjį skaičių. Ėjimo metu leidžiama pasirinkti bet kurias dvi gretimas sienas ir jose esančius skaičius padidinti 1. Atlikus keletą ėjimų visi šeši skaičiai tapo lygūs. Nustatykite, kuriems pradinių skaičių rinkiniams taip galėjo nutikti.

6. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms nelygybė
$$f(xy) \leqslant x f(y)$$
galioja su bet kokiais realiaisiais skaičiais $x$ ir $y$.
(Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)