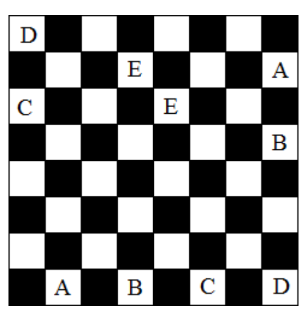
Atranka į 2016 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas
Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Šachmatų figūra rikis ėjimo metu gali būti perkelta iš vieno 8×8 lentos langelio į kitą, jei tie langeliai yra vienoje įstrižainėje. Taigi rikis gali judėti keturiomis kryptimis. Figūra *šmikis* juda kaip ir rikis, bet gali judėti tik trimis iš tų keturių krypčių (trūkstama kryptis dviem šmikiams gali skirtis). Kiek daugiausiai šmikių galima pastatyti ant 8×8 lentos taip, kad vienu ėjimu joks šmikis negalėtų nukirsti kito?

   Sprendimas. Tarkime, kad šmikiai ant lentos pastatyti reikiamu būdu. Iš kiekvieno šmikio nubrėžkime po tris rodykles, rodančias jo judėjimo kryptis. Kiekvienoje įstrižainėje rodyklių, einančių išilgai tos įstrižainės, yra daugiausiai dvi (iš trijų dvi būtų vienakryptės ir viena iš jų rodytų į šmikį, iš kurio išeina kita). Kadangi įstrižainių yra 30, tai rodyklių yra daugiausiai 60. Vadinasi, šmikių yra ne daugiau kaip $60 : 3 = 20$.

   Pirmus 10 šmikių pastatykime raidėmis pažymėtuose baltuose šachmatų lentos langeliuose (žr. pav.). Leistinos judėjimo kryptys nustatomos vienareikšmiškai: joks šmikis negali judėti ta pačia raide pažymėto langelio kryptimi. Kitus 10 šmikių analogiškai galime pastatyti juoduose langeliuose: pavyzdžiui, simetriškai tiesės, dalijančios lentą į dvi lentas 4×8, atžvilgiu. Šis pavyzdys nėra vienintelis.



   Atsakymas: 20.

2. Raskite visus lygties

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1$$

natūraliuosius sprendinius (a, b, c, d).

Sprendimas. Kadangi $4^a \cdot 5^b - 1 = (3+1)^a \cdot (3 \cdot 2 - 1)^b - 1 = 3k + (-1)^b - 1$ (čia $k \in \mathbb{Z}$) turi dalytis iš 3, tai skaičius b yra lyginis. Pažymėję $f = b/2$, gauname lygybę

$$3^c \cdot 11^d = 2^{2a} \cdot 5^{2f} - 1 = (2^a \cdot 5^f - 1) \cdot (2^a \cdot 5^f + 1).$$

Dauginamųjų skliaustuose skirtumas yra lygus 2, todėl jų bendras daliklis tegali būti 1 arba 2. Kadangi abu jie nelyginiai, tai jų bendras daliklis nelyginis. Vadinasi, skaičiai $2^a \cdot 5^f - 1$ ir $2^a \cdot 5^f + 1$ yra tarpusavyje pirminiai ir vienas iš jų turi būti lygus 3^c, o kitas 11^d.

Kadangi skaičių 11^d ir $2^a \cdot 5^f - 1$ paskutiniai skaitmenys yra atitinkamai 1 ir 9, tai jie nelygūs. Vadinasi, $2^a \cdot 5^f - 1 = 3^c$ ir $2^a \cdot 5^f + 1 = 11^d$. Atėmę pirmąją lygybę iš antrosios, gauname $11^d = 3^c + 2 \implies c \geqslant 2$ ir

$$11 \cdot (11^{d-1} - 1) = 9 \cdot (3^{c-2} - 1).$$

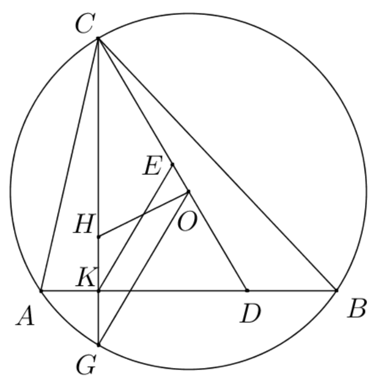
Taigi $3^{c-2} - 1$ dalijasi iš 11. Kadangi $3^m - 1, m \in \mathbb{N}$, dalijasi iš 11, tik kai $m = 5, 10, 15, \ldots$, tai $c - 2$ dalijasi iš 5. Vadinasi, $3^{c-2} - 1$ dalijasi iš $3^5 - 1 = 2 \cdot 11^2 \implies 11^{d-1} - 1$ dalijasi iš $11 \implies d = 1$. Tada $c = 2$ ir iš $2^a \cdot 5^f = 3^c + 1 = 10$ gauname, kad $a = 1$ ir $f = 1$, taigi $b = 2f = 2$. Nesunku įsitikinti, kad šis sprendinys tenkina duotąją lygybę: $4^1 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 11^1 = 100 - 99 = 1$.

Atsakymas: $(a, b, c, d) = (1, 2, 2, 1)$.

3. Smailiojo nelygiakraščio trikampio ABC aukštinė CK kertasi su kitomis dviem aukštinėmis taške H. Kraštinėje AB pažymėtas toks taškas D, kad atkarpa CD eina per trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centrą O. Taškas E dalija atkarpą CD pusiau. Įrodykite, kad tiesė EK dalija atkarpą OH pusiau.

Sprendimas. CK ir apibrėžtinio apskritimo sankirtą pažymėkime G (čia $G \neq C$). Kadangi $OC = OG$ (spinduliai) ir $EC = EK$ (tai kito apskritimo spinduliai, nes stačiojo trikampio CKD įžambinės vidurys E yra jo apibrėžtinio apskritimo centras), tai trikampiai COG bei CEK

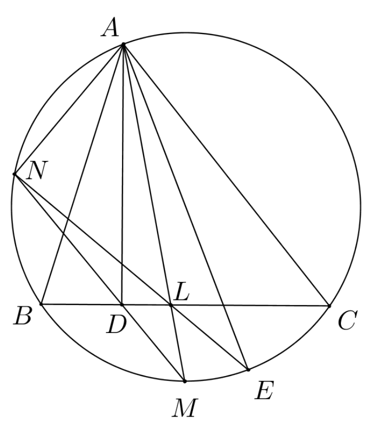
lygiašoniai ir $\angle CKE = \angle KCE = \angle GCO = \angle CGO$. Taigi $KE||GO$ (pagal atitinkamuosius kampus).



Kadangi tiesėms AH ir CG priklauso trikampio ABC aukštinės, tai $\angle GCB = 90° - \angle ABC = \angle HAK$. Be to, $\angle GAB = \angle GCB$ (kampai remiasi į tą patį lanką), todėl AK yra trikampio HAG pusiaukampinė ir aukštinė, taigi ir pusiaukraštinė $\implies$ $KH = KG$. Tada iš $KE||GO$ išplaukia, kad tiesei KE priklauso trikampio HGO vidurio linija, taigi ši tiesė eina ir per kraštinės OH vidurio tašką. Vadinasi, tiesė EK dalija atkarpą OH pusiau.

4. Nubrėžtos trikampio ABC aukštinė AD ir pusiaukampinė AL. Jo apibrėžtinis apskritimas ω kerta tiesę AL taške $M \neq A$, tiesę MD – taške $N \neq M$, o tiesę NL – taške $E \neq N$. Įrodykite, kad AE yra ω skersmuo.

Sprendimas.



Kadangi $\angle NAB = \angle NMB$ ir $\angle CBM = \angle CAM$ (remiasi į tą patį lanką), tai $\angle BDM = 180° - \angle DBM - \angle DMB = 180° - \angle CAM - \angle NAB$.

Be to, $\angle NDL = \angle BDM$ (kryžminiai) ir $\angle CAM = \angle BAM$ (pusiaukampinė). Todėl $\angle NDL + \angle NAL = \angle BDM + \angle NAB + \angle BAM = 180° - \angle CAM - \angle NAB + \angle NAB + \angle CAM = 180°$, taigi keturkampis $ALDN$ įbrėžtinis $\implies \angle ANL = \angle ADL = 90°$. Vadinasi, styga AE, į kurios galus remiasi statusis kampas ANE, yra apskritimo ω skersmuo.

5. Kiekvienoje kubo sienoje įrašyta po sveikąjį skaičių. Ėjimo metu leidžiama pasirinkti bet kurias dvi gretimas sienas ir jose esančius skaičius padidinti 1. Atlikus keletą ėjimų visi šeši skaičiai tapo lygūs. Nustatykite, kuriems pradinių skaičių rinkiniams taip galėjo nutikti.

Sprendimas. Per vieną ėjimą šešių skaičių suma padidėja 2, taigi jos lyginumas nepakinta. Šešių vienodų sveikųjų skaičių suma lyginė, todėl tokia turi būti ir pradinė suma.

Įrodysime, kad iš bet kurių pradinių skaičių, kurių suma lyginė, galime gauti šešis vienodus.

Didindami skaičius, galime padaryti juos visus teigiamus. Toliau nesunkiai galima gauti šešis lyginius (teigiamus) skaičius. Nelyginių skaičių turime 0, 2, 4 arba 6. Jei turime 2 nelyginius skaičius ir jie yra gretimose sienose, tai 0 nelyginių skaičių gausime vienu ėjimu. Jei jų 2 ir jie nėra gretimose sienose, tai pakanka dviejų ėjimų: imame tas dvi sienas ir bet kurią sieną gretimą joms abiem. Trimis ėjimais, suporavus sienas po dvi gretimas, galime pakeisti visų 6 skaičių lyginumą. Taip vietoj 6 nelyginių skaičių iš karto gauname 0, vietoj 4 gauname 2, o iš 2 nelyginių skaičių gauti 0 jau mokame.

Taigi parodėme, kaip gauti lyginius teigiamus skaičius $2a, 2b, 2c, 2d, 2e, 2f$ (čia $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$). Imkime tris sienas, turinčias bendrą viršūnę, ir jų skaičius padidinkime 2 (tai galima padaryti 3 ėjimais), taip pat du kartus didinkime skaičius kuriose nors dviejose iš likusių trijų sienų. Taip bet kuriuos penkis skaičius galima padidinti 2, nepakeičiant šešto. Jei su visais skaičiais, išskyrus pirmąjį skaičių $2a$, šią operaciją atliksime a kartų, po to su visais, išskyrus antrąjį (t. y. skaičių $2a + 2b$), šią operaciją atliksime b kartų, ir t. t., tai pabaigoje gausime visus šešis vienodus skaičius, lygius $2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f$.

Atsakymas: bet kokiems 6 sveikiesiems skaičiams, kurių suma lyginė.

6. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms nelygybė

$$f(xy) \leqslant xf(y)$$

galioja su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.
(Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

Sprendimas. Tegu $a = f(1), b = -f(-1)$. Duotoje nelygybėje atlikime tokius keitinius:
$x = 0 : f(0) \leqslant 0$;
$x = 2, y = 0 : f(0) \leqslant 2f(0) \implies 0 \leqslant f(0) \implies f(0) = 0$;
$x = -1, y = -1 : a \leqslant b$;
$x = z/y$, kur z ir y yra bet kokie teigiami skaičiai: $f(z) \leqslant zf(y)/y \implies f(z)/z \leqslant f(y)/y$. Į šią nelygybę įrašę $y = 1$ (atitinkamai $z = 1$), gausime $f(z) \leqslant az$ (atitinkamai $ay \leqslant f(y)$). Vadinasi, $f(x) = ax$ su kiekvienu $x > 0$;
$x = z/y$, kur z ir y bet kokie neigiami skaičiai: tada $f(z)/z \geqslant f(y)/y$ ir analogiškai gauname, kad $f(x) = bx$ su kiekvienu $x < 0$.

Belieka įsitikinti, kad bet kuri funkcija, lygi ax, kai $x \geqslant 0$, ir bx, kai $x < 0$, kur $a \leqslant b$, tenkina sąlygą. Pavyzdžiui, kai $x = 0$ arba $y = 0$, tai $f(xy) = 0 = xf(y)$, o kai $x < 0, y > 0$, tai $xy < 0$ ir todėl $f(xy) = bxy \leqslant axy = xf(y)$. Kiti trys atvejai ($x, y > 0$, $x, y < 0$ ir $x > 0, y < 0$) patikrinami analogiškai.

Atsakymas: $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ bx, & \text{kai } x < 0, \end{cases}$
kur a ir b yra bet kokie realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $a \leqslant b$.