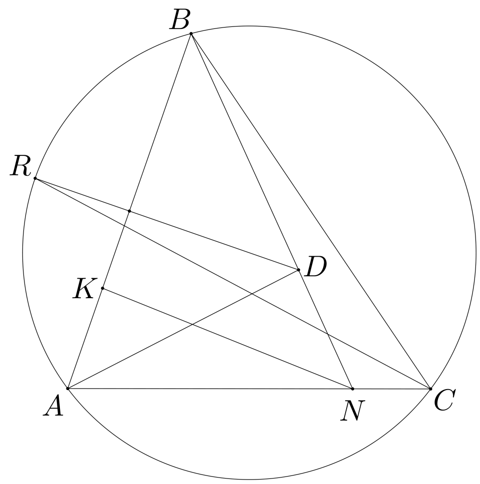
Atranka į 2017 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai K ir N, kad $KB = KN$. Kampo ACB pusiaukampinė kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą taškuose C ir R. Iš taško R į tiesę AB nuleistas statmuo kerta atkarpą BN taške D. Įrodykite, kad taškai A, K, D ir N priklauso vienam apskritimui.

   Sprendimas. Įbrėžtinio kampo ACB pusiaukampinė dalija lanką AB, į kurį jis remiasi, pusiau (žr. pav.).



   Taigi taškas R yra šio lanko AB vidurys ir iš jo į stygą AB nuleistas statmuo (dėl simetrijos) dalija ją pusiau. Trikampio ABD pusiaukampinė ir aukštinė iš viršūnės D sutampa, todėl jis lygiašonis: $\angle ABD = \angle BAD = \angle KAD$. Trikampis BKN taip pat lygiašonis, nes $KB = KN$, todėl $\angle KBN = \angle KNB = \angle KND$. Kadangi $\angle ABD = \angle KBN$, tai $\angle KAD = \angle KND$ ir keturkampis $AKDN$ yra įbrėžtinis.

2. Aibę, sudarytą iš $m \geqslant 2$ natūraliųjų skaičių, vadiname *paprasta*, jei bet kurie du tos aibės elementai yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n, kad bet kuriai paprastai aibei, kuri yra

aibės $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$ poaibis ir kuri turi lygiai n elementų, visada priklausytų bent vienas pirminis skaičius.

Sprendimas. Aibės S poaibis

$$T = \{1, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2\}$$

(čia $43^2 = 1849 < 2017$) yra sudarytas iš visų galimų pirminių skaičių kvadratų ir vieneto. Vadinasi, T yra paprasta aibė, kurioje nėra pirminio skaičiaus. Tokie bus ir T poaibiai. Todėl $n > |T| = 15$.

Nagrinėkime $n = 16$ ir bet kurį aibės S poaibį U, kuris yra paprasta aibė, turinti 16 elementų. Tarkime, kad joks U elementas nėra pirminis skaičius. Tada bent 15 aibės U elementų $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ (galbūt išskyrus skaičių 1) yra sudėtiniai skaičiai. Skaičiaus a_i mažiausią pirminį daliklį pažymėkime p_i. Tada $a_i \geqslant p_i^2$. Kadangi skaičiai a_i yra poromis tarpusavyje pirminiai, tai skaičiai $p_1, \ldots, p_{15}$ yra skirtingi. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $p_1 < p_2 < \cdots < p_{15}$. Tada $p_1 \geqslant 2$, $p_2 \geqslant 3$, $\ldots$, $p_{14} \geqslant 43$, $p_{15} \geqslant 47$. Tačiau tokiu atveju $a_{15} \geqslant 47^2 = 2209 > 2017$ nepriklauso S, prieštara. Vadinasi, aibei U būtinai priklauso pirminis skaičius, o skaičius $n = 16$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $n = 16$.

3. Du daugianarius su sveikaisiais koeficientais $A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ir $B(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ (čia $m, n \geqslant 0$ ir $a_n, b_m \neq 0$) vadiname *panašiaisiais*, jei $m = n$ ir jei rinkiniuose $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ir $b_0, b_1, \ldots, b_n$ kiekvienas sveikasis skaičius sutinkamas po tiek pat kartų.

   Daugianariai su sveikaisiais koeficientais $P(x)$ ir $Q(x)$ yra panašieji ir $P(16) = 3^{2012}$.

   a) Įrodykite, kad $Q(3^{2012}) \neq 0$.

   b) Raskite mažiausią galimą $|Q(3^{2012})|$ reikšmę.

Sprendimas. Pažymėkime $A = 3^{2012}$. Kadangi $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ ir $4|2012$, tai $A \equiv 1 \pmod 5$. Be to, $P(x)$ ir $Q(x)$ koeficientai yra tie patys, todėl ir jų sumos lygios: $Q(1) = P(1)$. Tada

$$Q(A) \equiv Q(1) \equiv P(1) \equiv P(16) \equiv A \equiv 1 \pmod 5,$$

t. y. $Q(A) = 5k + 1$ su $k \in \mathbb{Z}$. Vadinasi, $Q(A) \neq 0$ ir $|Q(A)| \geqslant 1$.

Įrodysime, kad reikšmė $|Q(A)| = Q(A) = 1$ pasiekiama. Tam imkime panašiuosius daugianarius $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $Q(x) = cx^2 + ax + b$. Reikia įrodyti, kad lygčių $P(16) = A$ ir $Q(A) = 1$ sistema, t. y.

$$\begin{cases} 256a + 16b + c = A, \\ cA^2 + aA + b = 1, \end{cases}$$

turi sveikąjį sprendinį $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, kur $a, c \neq 0$.

Galime eliminuoti $c = A - 256a - 16b$ antrojoje sistemos lygtyje ir palikti vieną lygtį $A^3 - 256aA^2 - 16bA^2 + aA + b = 1$ arba, pertvarkius,

$$a(256A^2 - A) + b(16A^2 - 1) = A^3 - 1.$$

Pažymėkime $d =$DBD$(256A^2 - A, 16A^2 - 1)$. Tada iš d dalijasi ir $A^3 - 1 =$ $= (16A^2 - 1)(16A^2 + 1) - (256A^2 - A)A^2$. Pažymėkime

$$u = \frac{256A^2 - A}{d}, \quad v = \frac{16A^2 - 1}{d}, \quad w = \frac{A^3 - 1}{d}.$$

Tada gautoji lygtis įgyja pavidalą $adu + bdv = dw$. Kadangi DBD$(u, v) =$ $= 1$, tai lyginys $ua \equiv w \pmod{v}$ turi sveikąjį sprendinį $a \neq 0$, kuris kartu su $b = (w - ua)/v$ tenkina lygtį $ua + bv = w$, o todėl ir $adu + bdv = dw$. Taigi su šiais $a, b \in \mathbb{Z}$ ir su $c = A - 256a - 16b$ turėsime $Q(A) = 1$. (Čia c yra nelyginis skaičius, todėl $c \neq 0$.)

Pastaba. $Q(A) = 1$ galima gauti ir kitaip. Pavyzdžiui, imant daugianarį $P(x) = (x - 16)(x - A)(ax + b) + A$, kur (a, b) yra sveikasis lygties $16Aa - (16A + 16 + A)b = A + 1$ sprendinys, o $Q(x)$ gaunant iš $P(x)$, sukeitus koeficientus a_0 ir a_1 vietomis.

Atsakymas: b) 1.

4. Duoti pirminiai skaičiai $p > q$ ir natūralieji skaičiai k, ℓ. Aibę A sudaro visi natūralieji skaičiai n, su kuriais $p^k q^\ell n$ dalijasi iš $p + n$.
   a) Įrodykite, kad $|A| \geqslant 1$.
   b) Įrodykite, kad $|A| \geqslant k\ell + k + \ell$.
   c) Įrodykite, kad $|A| \leqslant k\ell + k + 2\ell - 1$.
   d) Ar egzistuoja pirminių skaičių pora $p > q$, su kuria $|A| = 127$, kai $k = \ell = 10$?

(Čia $|A|$ žymi aibės A elementų skaičių.)

Sprendimas. Pažymėkime $m = p + n$. Aišku, kad $m > p$, o skaičius $p^k q^\ell n = p^k q^\ell m - p^{k+1} q^\ell$ dalijasi iš m tada ir tik tada, kai $m | p^{k+1} q^\ell$. Kadangi p ir q yra pirminiai skaičiai, tai $m = p^a q^b$ su sveikaisiais a, b, tenkinančiais tokias sąlygas: $0 \leqslant a \leqslant k + 1$, $0 \leqslant b \leqslant \ell$ ir $m = p^a q^b > p$. Šios sąlygos ne tik būtinos, bet ir pakankamos. Imdami porą $(a, b) = (2, 0)$, t. y. $m = p^2$, gauname, kad $m > p$. Taigi $n = m - p = p^2 - p \in A$, ir a) dalis įrodyta.

Pora $(a, b) = (0, 0)$ netinka, nes $m = p^0 q^0 = 1 < p$. Dėl tos pačios priežasties netinka ir poros $(a, b) = (0, 1)$ (nes $q < p$) bei $(a, b) = (1, 0)$. Taigi iš viso tinkamų porų (a, b) yra ne daugiau kaip $(k+2)(\ell+1) - 3 = k\ell + k + 2\ell - 1$. Vadinasi, $|A| \leqslant k\ell + k + 2\ell - 1$, ir c) dalis įrodyta. Kita vertus, visos poros $(1, b)$, kai $1 \leqslant b \leqslant \ell$, ir (a, b), kai $2 \leqslant a \leqslant k + 1$ bei $0 \leqslant b \leqslant \ell$, visada tinka. Jų yra $\ell + k(\ell + 1) = k\ell + k + \ell$. Iš čia išplaukia, kad $|A| \geqslant k\ell + k + \ell$, taigi b) dalis įrodyta. Be to, jei egzistuoja toks natūralusis $b_0 \leqslant \ell$, kad $q^{b_0 - 1} < p < q^{b_0}$, tai tinka dar ir poros $(0, b)$, kai $b_0 \leqslant b \leqslant \ell$, o poros $(0, b)$, kai $b < b_0$, netinka. Vadinasi,

$$|A| = k\ell + k + \ell + \ell - b_0 + 1 = k\ell + k + 2\ell - b_0 + 1.$$

Įrašę $k = \ell = 10$, gauname $|A| = 131 - b_0$. Taigi, su bet kuria pirminių skaičių pora $p > q$, tenkinančia sąlygą $q^3 < p < q^4$ (čia $b_0 = 4$ ir, pavyzdžiui, $(p, q) = (11, 2)$), turime $|A| = 127$, ko ir prašoma d) dalyje.

Atsakymas: d) taip, egzistuoja; pvz., $p = 11, q = 2$.

5. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$$

galioja su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.
(Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

Sprendimas. Duotąją lygybę pažymėkime $(*)$.

Jei $f(0) = c \neq 0$, tai į $(*)$ įrašę $y = 0$, $x = \frac{z}{c}$ gauname, kad $f(z) = c$, kai $z \in \mathbb{R}$. Taigi funkcija f yra konstanta, tačiau tada $(*)$ negalioja, kai, pvz., $x = y = 1$. Gavome prieštarą. Vadinasi, $f(0) = 0$.

Kai $x = y$, tai iš $(*)$ gauname $f(0) = f(x^2) - x^2$, arba $f(x^2) = x^2$. Kadangi x^2 gali būti bet koks teigiamas skaičius, tai $f(x) = x > 0$, kai $x > 0$.

Kai $x, y < 0$, tai $f(xy) = xy$, todėl iš $(*)$ gauname $f(xf(y) - yf(x)) = = xy - xy = 0$. Tada bet kokiems $x, y < 0$ turime $xf(y) - yf(x) \leqslant 0$. Sukeitę x ir y gauname $yf(x) - xf(y) \leqslant 0$. Taigi $xf(y) - yf(x) = 0$, arba $f(x)/x = f(y)/y$, kai $x, y < 0$. Vadinasi, $f(x)/x = d$ yra konstanta ir $f(x) = dx$, kai $x < 0$.

Kai $x = -1$, $y = 1$, tai iš $(*)$ gauname $f(-1 \cdot 1 - 1 \cdot (-d)) = -d + 1$, arba $f(d-1) = -(d-1)$. Jei $d \neq 1$, tai $f(d-1) \neq d-1$. Todėl $d-1 < 0$ ir $f(d-1)/(d-1) = -1 = d$. Vadinasi, $d = \pm 1$.

Kai $d = 1$, tai $f(x) = x$ su kiekvienu $x \in \mathbb{R}$. Lengva patikrinti, kad ši funkcija tenkina $(*)$.

Kai $d = -1$, tai $f(x) = |x|$ su kiekvienu $x \in \mathbb{R}$. Lygybė $(*)$ ir čia tenkinama: lygybės $|x|y| - y|x|| = |xy| - xy$ abi pusės neneigiamos ($|xy| \geqslant xy$), o jų kvadratai lygūs tam pačiam skaičiui $2x^2y^2 - 2xy|xy|$.

Atsakymas: $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ir $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Duotas natūralusis skaičius $n \geqslant 4$. Taisyklingasis n-kampis padalijamas į trikampius, nubrėžiant $n-3$ nesikertančias (neturinčias bendrų vidinių taškų) įstrižaines. Kiek daugiausiai tarpusavyje nelygių trikampių gali būti tarp gautųjų?

Sprendimas. Brėžiant įstrižaines, kiekviena nauja įstrižainė dalijo vieną iš dalių, į kurias tuo metu buvo padalytas n-kampis, į dvi dalis. Taigi bendras dalių skaičius didėjo vienetu ir, nubrėžus visas $n-3$ įstrižaines, gauti $n-2$ trikampiai. Tarkime, kad gauta a trikampių, kurių visos kraštinės yra n-kampio viduje, b trikampių, kurių lygiai dvi kraštinės yra n-kampio viduje (o viena kraštinė sutampa su n-kampio kraštine), ir c trikampių, kurių tik viena kraštinė yra n-kampio viduje (o dvi kraštinės yra gretimos n-kampio kraštinės). Atitinkamą tarpusavyje nelygių kiekvienos rūšies trikampių skaičių pažymėkime a_1, b_1 ir c_1. Skirtingų rūšių trikampiai negali būti lygūs, nes taisyklingojo n-kampio bet kuri įstrižainė ilgesnė už kraštinę, o skirtingų rūšių trikampiai turi po skirtingą kiekį kraštinių, esančių n-kampio kraštinėmis. Todėl užtenka rasti didžiausią galimą $N = a_1 + b_1 + c_1$ reikšmę.

Bendras trikampių skaičius yra $n-2 = a+b+c$, o bendras n-kampio kraštinių skaičius lygus $n = b+2c$. Eliminavę c, gauname $2a+b = n-4$. Visi trečiosios rūšies trikampiai yra lygūs, todėl $c_1 \leqslant 1$. Antrosios rūšies visi įmanomi nelygūs trikampiai gaunami pasirinkus dvi gretimas n-kampio viršūnes ir jungiant jas su viena iš joms negretimų $n-4$ viršūnių. Čia dėl simetrijos gausime lygių trikampių poras, todėl $b_1 \leqslant (n-4+1)/2 = (n-3)/2$. Taigi

$$N = a_1 + b_1 + c_1 \leqslant a + b_1 + 1 = \frac{n-4-b}{2} + b_1 + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n-4-b_1}{2} + b_1 + 1 = \frac{n-2+b_1}{2} \leqslant \frac{n-2+\frac{n-3}{2}}{2} = \frac{3n-7}{4}.$$

Didžiausia galima reikšmė $N = [\frac{3n-7}{4}]$ pasiekiama, kai n-kampyje $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ viršūnė A_0 sujungiama su viršūnėmis $A_2, A_4, \ldots, A_{2[\frac{n}{4}]}$ ir viršūnėmis $A_{2[\frac{n}{4}]+1}, A_{2[\frac{n}{4}]+2}, \ldots, A_{n-2}$. Taip gauname $c_1 = 1$ ir $b_1 \geqslant n-3-2[\frac{n}{4}]$, nes $A_0A_{n-2} < A_0A_{n-3} < \cdots < A_0A_{2[\frac{n}{4}]+2} \leqslant A_0A_{2[\frac{n}{4}]+1}$. Kai $n \equiv 0$ arba $1 \pmod 4$, tai $A_0A_{2[\frac{n}{4}]+2} < A_0A_{2[\frac{n}{4}]+1} \leqslant A_0A_{2[\frac{n}{4}]}$, ir b_1 dar vienetu didesnis. Viršūnė A_2 sujungiama su A_4, A_4 su A_6, $\ldots$, $A_{2[\frac{n}{4}]-2}$ su $A_{2[\frac{n}{4}]}$. Taip gauname $a_1 \geqslant [\frac{n}{4}] - 1$, nes $A_0A_2 < A_0A_4 < \ldots < A_0A_{2[\frac{n}{4}]}$. Iš viso tarpusavyje nelygių trikampių bus

$$N \geqslant n - 3 - 2\Big[\frac{n}{4}\Big] + \Big[\frac{n}{4}\Big] - 1 + 1 = n - 3 - \Big[\frac{n}{4}\Big],$$

kai $n = 4k+2$ ir $4k+3$ (čia $k \in \mathbb{Z}$), ir $N \geqslant n - 2 - [\frac{n}{4}]$, kai $n = 4k$ ir $4k+1$. Visais 4 atvejais $N \geqslant [\frac{3n-7}{4}]$, todėl $N = [\frac{3n-7}{4}]$.

Atsakymas: $[\frac{3n-7}{4}]$.