Organizuoja

Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XII LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2010 09 25

Uždavinių sąlygos

1. Šecherezada ir jos vyras Šachrijaras, keliaudami laiko mašina, atsidūrė gretimuose paties ilgiausio Azijos traukinio vagonuose. Vagonas, kuriame atsidūrė Šecherezada, yra 2009-tasis, skaičiuojant nuo to traukinio pradžios, o vagonas, kuriame atsidūrė Šachrijaras, yra 2010-tasis, skaičiuojant nuo to traukinio galo. Kiek vagonų yra tame pačiame ilgiausiame Azijos traukinyje?

2. Taip pat pakeliavęs laiko mašina jūreivis Sinbadas labai pamėgo smiginį bei ypač įvairius paprastučius galvosūkius su smiginiu.

Kiekvienam pradedančiam aritmetikos fanui jis paprastai visada užduoda tokį klausimą, jau spėtą praminti Sinbado preliudu: jeigu kiekvienas smiginio metimas pelno arba 40, arba 39, arba 24, arba 23, arba 17, arba 6 taškus, tai kiek kartų reikia mesti smiginį, kad surinktum lygiai 100 taškų?

Jūreivis Sinbadas kaip visada yra logiškas ir tvarkingas, todėl pripažįsta tik pagrįstus ir suprantamus atsakymus.

3. Jūrų Valdonė klausinėja jūreivio Sinbado anūką, geraširdį Achmedą, ar galima iš 8 x 8 kvadrato iškirpti:

(A) 10 stačiakampių, kurių matmenys 1 x 5.
(B) 12 stačiakampių, kurių matmenys 1 x 5.
(C) 13 stačiakampių, kurių matmenys 1 x 5.

Ką į šiuos klausimus turėtų atsakyti Acmedas?

4. Jūrų Valdonė prašo vyriausią jūreivio Sinbado anūką Ibrahimą užrašyti:

(A) devyniaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys būtų skirtingi ir kuris dalijasi be liekanos iš 4;

(B) patį mažiausią devyniaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys skirtingi ir kuris dalijasi be liekanos iš 4.

(C) patį didžiausią devyniaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys skirtingi ir kuris irgi dalijasi be liekanos iš 4.

5. Šecherezada nuo seno mėgo 5-ženklius palindromus. Palindromai yra tokie sveikieji skaičiai, kad nesvarbu, iš kurio galo juos beskaitysi, tas skaičius vis tiek bus toks pats (sakysime, 20502); joks jos rinkinio skaičius neprasideda 0. Šecherezada seniai pastebėjo, kad skaičius 20502 yra dviejų skaičių 102 ir 201 sandauga, kur skaičius 201 yra „apsuktas“ skaičius 102, ir labai susidomėjo, kiek gi tokių palindrominių skaičių apskritai gali būti – maža to, kad palindrominių, tai dar ir užrašomų dviejų skaičių sandauga, kai vienas dauginamasis yra „apsuktas“ kitas.

Padėkite jai ir pirmiausiai nustatykite:

(A) Ar jos rinkinyje tikrai yra daugiau tokių skaičių – o ne tik nurodytasis 20502? Jeigu taip, tai pasakykite Šecherazadai kokį nors kitą tokį skaičių su abiem jo dauginamaisiais.

(B) Ar valdovės rinkinyje yra nors 5 tokie skaičiai – bent po vieną kiekvienai savaitės darbo dienai?

(C) Nustatykite, kiek tiksliai skaičių yra tame, dabar jau legendiniame valdovės rinkinyje?

Organizuoja

Vilniaus universitetas

Remia

UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XII LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2010 09 25

Uždavinių sąlygos

1. Jūrų princesė visų išmintingesnių Sinbado laivo jūrininkų klausinėdavo, ar galima tarp skaičių, esančių kairiojoje lygybės pusėje

$$7^5 7^4 7^3 7^2 7 \ 1 = 2009$$

sudėlioti skliaustus ir aritmetikos veiksmų ženklus, kad užrašytoji lygybė pasidarytų teisinga.

Ką turėtų atsakyti princesei išmintingieji jūrininkai?

Atsakymą, suprantama, jūreiviai pagrįsdavo, kad princesė iš jų nesišaipytų.

Ar tai įmanoma?

2. Sinbadas keliaudamas jūromis retomis atilsio akimirkomis nejučia vis imdavo svajoti apie gimtinę žvelgdamas į 10 skaičių virtinę

135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143 ir 144.

Ilgesio kankinamas jis imdavo visaip dėlioti tos virtinės skaičius.

Sykį jis labai užsidegė surasti visus tokius natūraliuosius skaičius, kurių niekaip negalima gauti iš jo turimos virtinės skaičių juos sudėjinėjant. (Pastaba. Dėliodamas savo virtinės skaičius Sinbadas neprivalo nei būtinai panaudoti kiekvieną kartą juos visus, nei net bet kurį iš jų imti sumon tik vieną kartą, t.y. bet kurį iš jų galima imti sumon ir po kelis kartus, ir visai neimti – bet sumoje turi būti bent du dėmenys).

(A) Nurodykite kokį nors natūralųjį skaičių, kurio Sinbadas negali gauti dėliodamas savo virtinės skaičius.

(B) Ar taip dėliodamas jis gali gauti „metų skaičių“ 2010?

(C) Ar egzistuoja pats didžiausias skaičius, kurio niekaip negalima būtų gauti dėliojant Sinbado virtinės skaičius?

3. 20 Sinbado draugų jūrininkų pakeliavę laiko mašina užsidegė tenisu ir išlipę į krantą Dubajuje surengė teniso turnyrą, kur kiekvienas sužaidė po vieną geimą su kiekvienu kitu jūrininku. Kai jie vėl išplaukė į jūrą, Sinbadas iškėlė tokį, kaip jiems visiems pasirodė, labai įdomų ir kartu kai kam oi kaip sunkų klausimą: tarkime, kad jie sužaidė bet kaip, kad kiekvienas jūreivis tikrai laimėjo nors vieną geimą (lygiųjų tenise nebūna). Tai ar tada po kiekvieno tokio turnyro būtinai visada rasis tokie trys jūrininkai A, B ir C, kad A yra laimėjęs prieš B, B yra laimėjęs prieš C ir C yra laimėjęs prieš A?

4. Jūreivio Sinbado knygų lentynėlėje yra 10 skirtingų knygų. Kiekvieną vakarą Sinbadas jas išima iš knygų skrynelės ir vis kitaip išrikiuoja jas savo knygų lentynėlėje. Garbusis jūreivis rikiuoja jas kaip tinkamas, tik visada žiūri, kad Jūreivių garbės kodekso komentarai visada stovėtų kairiau Interneto veiklos pradžiamokslio (abi minėtosios knygos gali ir nestovėti šalia). Kiek daugiausiai vakarų, išlaikydamas tą savo principą, jis galės išdėlioti savo 10 turimų knygų, kad knygų rikiuotė niekada nesikartotų?

5. Princesė prašo Sinbado visiems paaiškinti, ar skaičius $4^{20}+2^{20}+1$ tikrai dalijasi dar iš kokio nors trečiojo natūraliojo skaičiaus, o ne tik kad iš 1 ir, žinoma, pats iš savęs.

(Mokslininkų kalba kalbant, Princesė, suprantama, teiraujasi, ar tas skaičius yra pirminis skaičius, ar nėra.)

Tai kaip ten yra? Atsakymą princesei pagrįskite.

6. Jūreivis Sinbadas, išgirdęs, kad skaičiai, $x_{1,2}$, tinkantys vadinamajai kvadratinei lygčiai $ax^2+bx+c=0$, jeigu jų yra, randami iš lygybės $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, ir prisiminęs, kad pradžios mokykloje jam puikiai sekėsi visaip grupuoti narius ir iškėlinėti prieš skliaustus bendrus daugiklius, staiga ėmė ir pareiškė, kad jam nesudarytų jokių keblumų per pusvalandį surasti absoliučiai visus, kad ir tokios kubinės lygties $9x^3-13x-6=0$ sprendinius.

Jis dar pridūrė, kad kiekvienas, kuris irgi gali tai padaryti ir dar parodyti, kaip jis tai daro, skelbiamas jūreivio Sinbado aritmetiniu kolega ir gali prisijungti prie jo Facebook‘o.

Ar nenorėtumėte ir Jūs dabar nedelsdamas tapti kapitono Sinbado aritmetiniu draugu?