Organizuoja

Vilniaus universitetas

Remia

UAB „AFFECTO LIETUVA"

LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,

Leidykla TYTO ALBA,

Leidykla TEV,

NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XVII LIETUVOS 5-6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2015 09 26

1. Iš ciklo „Norite tikėkite, norite – ne": Tailande bet kuris gerai aritmetiškai dresiruotas liūtas be vargo bet kuriuo paros metu susigaudo, kokia raide yra pažymėtas teisingas žemiau pateikto aritmetinio uždavinio atsakymas. Tame uždavinyje klausiama, kuri iš čia pateikiamų trupmenų $\frac{2014}{2015}, \frac{2015}{2014}, \frac{2015}{2016}, \frac{2016}{2015}$ yra arčiausiai 1.

(A) Pirmoji (B) Antroji (C) Trečioji (D) Ketvirtoji (E) Visos šios trupmenos yra vienodai nutolusios nuo 1.

2. Visų įspūdingiausių Tailando dramblių numeracijai dresiruotojas Mar Tyn As iš eilės po vieną kartą panaudojo visus sveikuosius triženklius skaičius, didesnius už 111, bet mažesnius už 222. Visų nuostabai vėliau paaiškėjo, kad visi drambliai, kurių numeracijai garsusis Mar Tyn As panaudojo bent du vienodus skaitmenis prireikus gali ir skraidyti – ir tik jie. Pavyzdžiui, skraidyti gali dramblys su numeriu 200. Kiek yra skraidančių dramblių tarp visų įspūdingiausių Tailande Mar Tyn Aso sunumeruotų dramblių?

(A) 30 (B) 29 (C) 28 (D) 27 (E) 26

3. Yra 36 drambliai, kurių kiekvienas straubliu laiko po vieną rutulį, kurie yra sunumeruoti panaudojant visus skaičius nuo 1 iki 36, po vieną skaičių ant kiekvieno dramblio straubliu laikomo rutulio. Tuos dramblius reikia suskirstyti į kelias grupes, griežtai laikantis tokių taisyklių – kitaip joks dresiruotojas nedrįs prisiimti atsakomybės už tuos dramblius – o Tailande visi puikiai žino, kad įsiutusi dramblių kaimenė yra daug blogiau už Karibų tornado. Taigi drambliai turi būti ramūs, o tam, kad jie būtų ramūs, juos reikia suskirstyti į grupes, priklausomai nuo jų laikomų rutulių numerių, tokiu būdu:

(a) jeigu du drambliai pakliūva į vieną pogrupį, tai jų laikomų rutulių numerių suma dalijasi iš trijų;

(b) jokiame pogrupyje jokiam drambliui negalima likti vienam.

Į kiek mažiausiai pogrupių griežtai prisilaikant nurodytųjų reikalavimų galima suskirstyti tuos 36 dramblius?

4. Jūs gal nepasitikėdami linguosite galvomis ar kaip nors kitaip, gal dar aiškiau išreikšite mano netikėjimą, bet mes šią vasarą Tailande tikrai esame matę tokį mokytą dramblį, apie kurį mums pasakojo, kad jis savo jaunystėje visada galėdavo sausakimšoms tribūnoms stebint savo lanksčiu straubliu patamsinti kai kuriuos nemažus didžiulės 6×6 lentelės vienetinius langelius taip, kad kiekvienoje eilutėje būtų visada lygiai trys patamsinti langeliai, o kiekviename stulpelyje – visada arba tik vienas, arba net keturi. Jeigu Jūs tikrai tuo negalite patikėti, tai ir netikėkite, nes kažkada ir mes niekuo netikėjome. Geriausiai būtų, jeigu Jūs pamėgintumėte atlikti tai patys ir sėkmės atveju pademonstruotumėte mums aiškiu brėžiniu, kaip tai daroma, o jeigu kartais tai neįmanoma, tai tada aiškiai ir suprantamai paaiškintumėte mums, kodėl taip nutinka. Tai galima ar ne patamsinti kai kuriuos 6×6 lentelės vienetinius langelius taip, kad kiekvienoje eilutėje būtų visada lygiai trys patamsinti langeliai, o kiekviename stulpelyje – visada arba tik vienas, arba net keturi.

5. Tailando karališkajame sode tvyro stebuklingas tvenkinys, kuriame kartą metuose pražysta 7 nuostabūs lotoso žiedai, sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 7 taip, kaip tai pavaizduota šalia esančiame piešinyje.

Karališkoji varlė turi teisę šokinėti nuo vieno lotoso žiedo ant kito, bet tik per tris, arba per penkis žiedus, nesvarbu ar kairėn, ar dešinėn. Sakysime, karališkoji varlė galėtų nuo antro lotoso šokti ant penkto, arba ant septinto žiedo. Pagal tradiciją karališkosios varlės priedermė yra stebuklingai atsirasti ant tokio lotoso žiedo, kad ji pajėgtų apšokuoti visus tuos žiedus, aplankydama kiekvieną žiedą vienintelį kartą – vadinasi, jos kelio pradžia ir galas bus skirtingose vietose. Kurie žiedai gali būti karališkosios varlės starto vietos?

(A) visi žiedai nuo pirmojo iki septintojo (B) 1, 3, 5 ir 7 žiedai (C) 3 ir 5 žiedai (D) 4 žiedas (E) nė vienas iš jų

Organizuoja

Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA"
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XVII LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2015 09 26

1. Jūs gal nepasitikėdami linguosite galvomis ar kaip nors kitaip, gal dar aiškiau išreikšite savo netikėjimą, bet mes šią vasarą Tailande tikrai esame matę tokį mokytą dramblį, apie kurį mums pasakojo, kad jis savo jaunystėje visada galėdavo sausakimšoms tribūnoms stebint savo lanksčiu straubliu patamsinti kai kuriuos nemažus didžiulės 6×6 lentelės vienetinius langelius taip, kad kiekvienoje eilutėje būtų visada lygiai trys patamsinti langeliai, o kiekviename stulpelyje – visada arba tik vienas, arba net keturi. Jeigu Jūs tikrai tuo negalite patikėti, tai ir netikėkite, nes kažkada ir mes niekuo netikėjome. Geriausiai būtų, jeigu Jūs pamėgintumėte atlikti tai patys ir sėkmės atveju pademonstruotumėte mums aiškiu brėžiniu, kaip tai daroma, o jeigu kartais tai neįmanoma, tai tada aiškiai ir suprantamai paaiškintumėte mums, kodėl taip nutinka. Tai galima ar ne patamsinti kai kuriuos 6×6 lentelės vienetinius langelius taip, kad kiekvienoje eilutėje būtų visada lygiai trys patamsinti langeliai, o kiekviename stulpelyje – visada arba tik vienas, arba net keturi?

2. Yra 36 drambliai, kiekvienas straubliu laiko po vieną rutulį, kurie yra sunumeruoti panaudojant visus skaičius nuo 1 iki 36, po vieną skaičių ant kiekvieno dramblio straubliu laikomo rutulio. Tuos dramblius reikia suskirstyti į kelias grupes (kitaip joks dresuotojas nedrįs prisiimti atsakomybės už tuos dramblius – o Tailande visi puikiai žino, kad įsiutusi dramblių kaimenė yra daug blogiau už Karibų tornado). Taigi drambliai turi būti ramūs, o tam, kad būtų ramūs, juos reikia suskirstyti į grupes, laikantis tokių dviejų taisyklių:

(a) bet kurioje grupėje turi būti bent du drambliai;

(b) jei du drambliai pakliūva į vieną grupę, tai jų laikomų rutulių numerių suma turi dalytis iš trijų.

Į kiek mažiausiai grupių griežtai paisant nurodytųjų reikalavimų galima suskirstyti tuos 36 dramblius?

3. Tailando karališkajame sode tvyro stebuklingas tvenkinys, kuriame kartą metuose pražysta 7 nuostabūs lotoso žiedai, sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 7 taip, kaip tai pavaizduota šalia esančiame piešinyje. Karališkoji varlė turi teisę šokinėti nuo vieno lotoso žiedo ant kito, bet tik per tris, arba per penkis žiedus, nesvarbu ar kairėn, ar dešinėn. Sakysime, karališkoji varlė galėtų nuo antro lotoso šokti ant penkto, arba ant septinto žiedo. Pagal tradiciją karališkosios varlės priedermė yra stebuklingai atsirasti ant tokio lotoso žiedo, kad ji pajėgtų apšokuoti visus tuos žiedus, aplankydama kiekvieną žiedą vienintelį kartą – vadinasi, jos kelio pradžia ir galas bus skirtingose vietose. Kurie žiedai gali būti karališkosios varlės starto vietos?

4. Tailando karališkame zoologijos sode dirba legendinis dresiruotojas Juo Ro Čy, kurio vadovaujami aritmetiškai brandūs Tailando liūtai pajėgia (taip, taip, patys matėme) atlikti tokio lygio aritmetinį triuką. Yra sugalvojama dešimt sveikųjų skaičių (tam reikalui efektyvumo vardan paprastai pasitelkiamas koks iš krašto neatsargiai sėdintis giliai raštingas žiūrovas; patys jo sugalvojami skaičiai neprivalo būti visi skirtingi), tada jis, tasai žiūrovas, visais galimais būdais be klaidų suskaičiuoja kiekvienų devynių iš dešimties tų skaičių sumą, tame seanse, kurį Tailande mes matėme, tos sumos jam išėjo rikiuojant jas iš eilės pagal didumą 92, 93, 94, ..., 100 (pasikartojančios sumos buvos imamos vieną kartą). Gautos sumos parodomos liūtams ir tie pasimuistę – visi kantriai laukia – išriaumoja, kokie gi buvo sugalvotieji skaičiai. Kol čia liūtai ką išriaumos, gal ir mes galėtume atspėti ar kitaip nustatyti, kokius skaičius buvo sugalvojęs tas mokytas žiūrovas.

5. Natūralusis skaičius yra *tailandiškai apvalus*, jeigu jis yra didesnis už 10 ir dalijasi iš savo skaitmenų sandaugos. Kiek natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas yra tailandiškai apvalus, gali eiti iš eilės?

6. Natūralusis skaičius N vadinamas *nežemiško sumanumo* skaičiumi, arba, trumpai, *tailandiškuoju perlu*, jeigu jis pasižymi tokia savybe: egzistuoja teigiamas sveikasis skaičius k, turintis bent du skaitmenis, kurie visi yra vienodi (kaip kad, pavyzdžiui, 999 arba 222222), ir toks, kad skaičius $N \cdot k$ irgi susideda iš vienodų skaitmenų. Sakysime, skaičius 3 yra tailandiškasis perlas, nes $3 \cdot 222 = 666$.

(A) Nurodykite skaičių, kuris turi 10 skaitmenų ir kuris Jums rodosi esąs tailandiškasis perlas, bei įrodykite, kad jis tikrai yra toks.

(B) Įrodykite, kad skaičius 11 nėra tailandiškasis perlas.

(C) Nustatykite, ar 143 yra tailandiškasis perlas, ar nėra ir, suprantama, deramai pagrįskite savo atsakymą.