SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA
Marijampolė, 2013 m. gruodžio 13 d.

1. Bešvilpaujantis Suvalkijos berniokas kartą kažkur pamatė tokią paprastą lentelę, kurios langeliuose buvo surašyti tik nuliai ir vienetai – po vieną skaičių kiekviename langelyje.
Geriau pasižiūrėjęs berniokas pamatė, kad ta lentelė ne visai paprasta, nes bet kuriame jos 2 x 2 kvadrate buvo po lygiai tris vienodus skaičius, o ketvirtas skaičius buvo kitoks.

(A) Pateikite ir Jūs mums tokią 5 x 5 lentelę, kurios langeliuose įrašyti tik nuliai ir vienetai, po vieną skaičių kiekviename langelyje, ir kurios bet kuriame 2 x 2 kvadrate yra lygiai trys vienodi skaičiai, o ketvirtas skaičius yra visada skirtingas.

(B) Toliau prašome mums pateikti tokią 5 x 5 lentelę su pačia didžiausia įmanoma tokios lentelės visų 25 nulių ir vienetų suma. Ir paaiškinkite mums, kodėl ta suma yra pati didžiausia.

2. Vieną kartą Suvalkijos berniokas pavargęs nuo darbų ir dainų užmigo ir sapne regėjo du triženklius skaičius. Nors tie skaičiai buvo labai panašūs, tačiau berniokas puikiai įsiminė, kad jie tesiskyrė tik vieninteliu skaitmeniu kažkurioje vienoje pozicijoje, jis jau nebeatsiminė kurioje – šimtų, dešimčių ar vienetų, o likusiose dviejose pozicijose kiti skaitmenys buvo tokie patys. Negana to, balsas už kadro įtaigiai pasakė ir dar pakartojo, kad vienas iš tų poros skaičių yra kito poros skaičiaus kartotinis.

Rytą prabudęs Suvalkijos berniokas suprato, kad derėtų išsiaiškinti keletą dalykų:

(A) Ar jo sapnas buvo teisingas ir ar tikrai galima rasti tokius du triženklius skaičius (m, n), tesiskiriančius tik vienoje kurioje nors iš trijų pozicijų, o kitose dviejose pozicijose turinčių tuos pačius skaitmenis ir dar, žinoma, tokius, kad vienas iš jų būtų kito kartotinis?

(B) Gal jums pakaktų kantrybės surasti jau penkias tokias poras (m, n).

(C) Gal paaiškintumėte mums, ar tokių porų (m, n) yra daugiau kaip dešimt.

(D) Suraskite, kiek tokių porų (m, n) yra iš viso.

Pastaba. Skaičiuodami galimas tokias poras laikykime, kad antrasis poros skaičius n yra nemažesnis už pirmąjį poros skaičių m.

3. Suvalkijos berniokas labai atsargiai spręsdavo geometrinius uždavinius. Ir ne kiekvieną geometrinį uždavinį jis galėdavo greitai išspręsti, bet uždavinius su kampais mėgo – gal todėl, kad jam sekėsi juos spręsti. Kartą jo sesė geltonkasė ir parnešė jam tokį uždavinį su kampais ir liūdnokai šyptelėjusi paprašė bernioko padėti surasti tinkamą sprendimą. Perskaitęs sąlygą berniokas iš karto prisėdo prie brėžinio – jis puikiai žinojo, kad brėžinys geometriniame uždavinyje yra aukso vertės. Pati uždavinio sąlyga buvo trumputė ir skambėjo taip:

Trikampyje ABC išvedus kampų A ir B pusiaukampines AD ir BE paaiškėjo, kad net trijų kampų ADC, AEB ir BAC didumai yra tokie patys. Kam lygūs trikampio ABC kampai?

4. 2013 metams sėkmingai besibaigiant Suvalkijos bernioko mėlynakė sesė Laura pamėgo skaitinius žaidimus, kuriuose dažniausiai reikėdavo kažkokiu nurodytu būdu stengtis pasiekti išsvajotą metų skaičių 2013.

Vieno dviejų žaidėjų žaidžiamo žaidimo sąlyga buvo tokia:

Pirmiausiai lentoje yra parašomas skaičius 2.

Tada bešvilpaujantis berniokas ir sesė geltonkasė Laura pakaitomis ima prie lentoje esamo skaičiaus pridėjinėti natūraliuosius skaičius. Kiekvienu dėjimu prie jau esamo skaičiaus yra reikalaujama pridėti bent 1, bet, antra vertus, prie jau esančio lentoje skaičiaus reikia pridėti mažesnį skaičių už tą, kuris tuo metu yra parašytas lentoje. Užrašant naują skaičių, ankstesnis nutrinamas. Pirmąjį ėjimą Lauros siūlymu visada daro bešvilpaujantis berniokas.

Laimi tas žaidėjas, kuris pirmasis lentoje parašo metų skaičių 2013.

Ar gali kuris nors iš jų visada pirmasis pasiekti 2013, kad ir ką bedarytų kitas žaidėjas?

5. Suvalkijos bernioko mėlynakę sesę Laurą ir jos kaimynę Astą kurį laiką šiek tiek gąsdino toks klausimas su trupmenomis: sakykime, kad $\dfrac{x}{x^2+x+1}=a$, tai kam lygu $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$?