SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA
Marijampolė, 2015-12-18

Sąlygos ir sprendimai

1. Vilkaviškio vaikai ėmė ieškoti tokio skaičiaus, apie kurį mokytoja Gabrielė prasitarė, kad jis yra 5-ženklis, tačiau dar nėra nustatyta, nei koks yra jo pirmasis skaitmuo *A*, nei koks jo paskutinysis skaitmuo *B*. Toliau linksmoji mokytoja Gabrielė sakė, kad trys viduriniai to 5-ženklio skaičiaus skaitmenys yra 679 (nurodyta tvarka) ir kad jis tikrai dalijasi be liekanos iš 72. Mokytoja Gabrielė klausė vaikų, ar jie negalėtų nustatyti, kokia yra to 5-ženklio skaičiaus $A679B$ kraštinių skaitmenų A ir B suma $A + B$.

1. Sprendimas

Sprendimo esmė yra sudėta iš trijų motyvų.
Pirmasis motyvas būtų dalumas iš

$$72 = 8 \cdot 9,$$

o tai yra tas pats kaip dalumas iš

$$8 \text{ ir } 9.$$

Taip yra todėl, kad 8 ir 9, kaip bet kurie kiti tik per 1 besiskiriantys skaičiai, jokių bendrų daliklių, didesnių už 1, neturi.
Antrasis, labiau techninis motyvas, primena, kad skaičius dalinasi iš 8 tada ir tiktai tada, kai iš 8 dalinasi jo „baigiamoji“ triženklė iš 3 paskutiniųjų jo skaitmenų sudaryta dalis.
Trečioji, irgi labiau „technologinė“ pastaba, primintų, kad skaičius dalijasi iš 9 tada ir tiktai tada, kai iš 9 dalijasi kalbamojo skaičiaus skaitmenų suma.
Todėl skaičius $A679B$ dalijasi iš 8 tada ir tiktai tada, kai iš 8 dalijasi 3-ženklis skaičius $79B$, o šis dalijasi iš 8 tik tada, kai B = 2, arba kai jis yra 792 (tikrai, prie 792 pridėjus 8, gautume aiškiausiai iš visų triženklių skaičių iš 8 besidalijantį skaičių, vardu 800. Taigi tikrai $B = 2$.
Todėl skaičiaus $A679B$ dalumas dabar jau iš 9 virsta sumos $A + 6 + 7 + 9 + B = A + 22 + B = A + 24$ dalumu iš 9, kuris yra įgyvendinamas tada ir tiktai tada, kai $A = 3$, nes tik tada suma $24 + A = 24 + 3 = 27$ dalijasi iš 9.
Taigi vienintelė galimybė skaičiui $A679B$ dalintis iš 72 yra įgyvendinama išimtinai tiktai tada, kai

$$A = 3, \text{ o } B = 2,$$

arba, kitaip sakant, kai

$$A + B = 5.$$

Atsakymas

Vienintelė galimybė skaičiui $A679B$ būti daliam iš 72 yra $A + B = 5$.

2. Skaičiai A, B, C, D , E, F ir G, iš kurių nė vienas nėra neigiamas, vadinami *penkialypiškai pozityvia Alvito septyniuke*, jeigu jie tenkina tokias penkias sąlygas:

$$A + B + C = 2,$$
$$B + C + D = 2,$$
$$C + D + E = 2,$$
$$D + E + F = 2,$$
$$E + F + G = 2.$$

Kokia yra pati didžiausia galima penkialypiškai pozityvios Alvito septyniukės A, B, C, D, E, F ir G suma $A + B + C + D + E + F + G$?

2. Sprendimas

Sudėję pirmą, trečią bei penktą lygybes gauname, $A + B + 2C + D + 2E + F + G = 6$. Kadangi skaičiai A, B, C, D, E, F ir G, kaip pasakyta, yra neneigiami, tai suma

$$A + B + 2C + D + 2E + F + G$$

yra tikrai nemažesnė kaip ieškomoji visų tų septynių skaičių suma

$$A + B + C + D + E + .F + G.$$

Taigi

$$A + B + C + D + E + .F + G \leq 6.$$

Tačiau, kita vertus, tuojau įsitikinsime, kad suma

$$A + B + C + D + E + .F + G$$

tikrai gali būti lygi 6, o visos lygtys patenkintos.

Taip tikrai yra, kai, pavyzdžiui, trys skaičiai

$$A = D = G = 2,$$

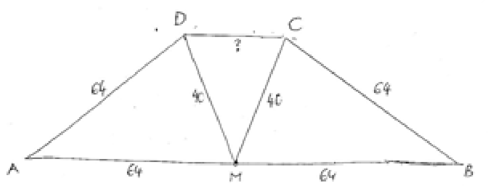
o kiti likę keturi skaičiai

$$B = C = E = F = 0.$$

Atsakymas

Pati didžiausia įmanoma penkialypiškai pozityvios Alvito septyniukės suma yra 6.

3. Vienas linksmas Lazdijų krašto mokytojas Erikas sykį mokė Šeštokų vaikus geometrijos pliaže prie Kauknorėlio ežero. Jis lazda ant drėgno smėlio nubraižė jiems nemažą brėžinį, kuriame buvo pavaizduotas keturkampis *ABCD*. Kraštinės *AB* vidurio tašką mokytojas Erikas pažymėjo raide *M* ir pasakė vaikams, kad atkarpų *AM*, *BM*, *BC* ir *AD* ilgiai yra lygūs 64, o abiejų atkarpų *DM* ir *CM* ilgiai yra lygūs 40. Po to jis paprašė mokinių surasti kraštinės *DC* ilgį. Koks yra kraštinės *DC* ilgis?



3. Sprendimas

Kadangi *ABCD* yra keturkampis, tai kampas *AMB* yra ištiestinis kampas, kitaip tariant, „operuojant“ laipsniais, $\angle AMB = 180°.$ Vadinasi, $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMD = 180°.$ Kadangi trikampiai *AMD* ir *BMC* yra lygūs (nes jų visos trys kraštinės yra atitinkamai lygios), tai mes turime, kad $\angle CMB = \angle MDA.$ Toliau, kadangi $\angle DMC = 180° - \angle AMD - \angle MDA = \angle DAM$, nes trikampio *AMD* visų trijų kampų suma yra $180°.$ Iš čia išeina, kad abiejų lygiašonių trikampių *DMC* ir *DAM* kampai prie viršūnės yra lygūs, todėl tie trikampiai yra panašūs ir, vadinasi, jų kraštinės yra proporcingos, o tai reiškia, kad $\frac{CD}{DM} = \frac{DM}{AD}.$ Todėl atkarpos *CD* ilgis yra $\frac{40}{64} \cdot 40 = 25.$

Atsakymas

Kraštinės *CD* ilgis yra 25.

4. Bešvilpaujančio Suvalkijos bernioko pusseserė Vita iš Alvito kartą sudarė ištisas devynias trupmenas, kuriose ji du kartus, vieną kartą skaitiklyje, o kitą kartą– jau vardiklyje, panaudojo visus nenulinius skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 (galimu tokiu devynių trupmenų rinkinio pavyzdžiu galėtų būti trupmenų

$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{2}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{1}, \frac{9}{9}$ rinkinys.) Po to Vitos pusseserė Daina, žinoma Kėdainių stropuolė, prie kiekvienos trupmenos prirašo arba pliusą, arba minusą ir gautuosius skaičius sudeda. Kokia yra pati mažiausia galima neneigiama suma, kurią abi mergaitės gali gauti taip darydamos?

Sprendimas

4. Pažiūrėjus į pavyzdį

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{8}+\frac{2}{1}+\frac{8}{4}-\frac{3}{3}-\frac{5}{5}-\frac{6}{6}-\frac{7}{7}-\frac{9}{9}=0$$

matome, jog abi mergaitės tikrai gali gauti nulį. O kadangi 0 yra mažiausias neneigiamas skaičius, tai 0 ir yra mūsų uždavinio atsakymas.

Atsakymas

Mažiausia neneigiama suma, kurią abi darbščiosios mergaitės gali gauti taip darydamos, yra 0.

5. Į kiekvieną iš lentelės 5×5 langelių yra įrašoma po vieną skaičių. Tas pats skaičius gali būti įrašytas į skirtingus lentelės langelius, tačiau jokioje eilutėje ir jokiame stulpelyje visi penki skaičiai negali būti lygūs. Tokia lentelė yra **vadinama** *gelgaudiškietiškai grakščia*, jeigu kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio vidurinis skaičius yra lygus tos eilutės arba to stulpelio visų 5 skaičių vidurkiui. *Zanavykiškasis gelgaudiškietiškai grakščios lentelės įvertis* parodo, kiek lentelės skaičių yra mažesni už skaičių, esantį pačiame centriniame lentelės langelyje.

Koks yra pats mažiausias galimas gelgaudiškietiškai grakščios lentelės zanavykiškasis įvertis?

Sprendimas.

5. Žemiau pateikiamas pavyzdys demonstruoja, kad zanavykiškasis gelgaudiškietiškai grakščios lentelės įvertis gali būti (vos) 3.

– 54	1	–12	5	0
1	2	3	4	5
–12	3	0	3	6
5	4	3	2	1
0	5	6	1	18

Beliko tik įsitikinti, kad mažesnis jis jau nebegali būti.

Tai nuveikiama dviem nesudėtingais pastebėjimais, iš kurių pirmasis nurodo, kad ir trečioje eilutėje, ir trečiajame stulpelyje turi rastis po skaičių, mažesnį už skaičių, esantį pačiame centriniame lentelės langelyje. Taip yra todėl, kad uždavinio sąlygoje yra nurodyta, kad vidurinis ir kiekvienos eilutės, ir kiekvieno stulpelio skaičius yra visų tos eilutės ar stulpelio skaičių vidurkis ir kad jokioje eilutėje ir jokiame stulpelyje nėra penkių vienodų skaičių. Taip skirtingose mūsų lentelės vietose, iš kurių viena yra trečioje eilutėje, o kita – trečiame stulpelyje, bet ne pačiame centre, atsiranda po skaičių, mažesnį už skaičių, esantį pačiame lentelės centre. Belieka surasti dar vieną lentelės vietą, kurios skaičius būtų mažesnis už lentelės centro skaičių ir visi reikalai jau būtų nuveikti.

Tokią vietą rasti mums padės antroji pastaba, leisianti nurodyti tokį trečiąjį lentelės langelį.

Trečioje eilutėje, kaip jau yra minėta, tikrai yra skaičius, mažesnis už paties lentelės centro skaičių. Todėl imdami stulpelį, kuriame „randasi“ tas mažesnis už centrinį trečiosios eilutės skaičius, ir jame galima surasti skaičių, mažesnį už tą trečiosios eilutės skaičių, kuris, savo ruožtu, yra mažesnis už lentelės centro skaičių. Tai ir būtų ta trečioji lentelės vieta, kurios skaičius yra mažesnis už centrinį lentelės skaičių. Dar sykį pabrėžkime, kad jis yra iš visai kitos lentelės vietos negu tie ankstesnieji du parinktieji skaičiai.

Taigi įsitikinome, zanavykiškasis bet kurios gelgaudiškietiškai grakščios lentelės įvertis visada yra nemažesnis už 3. O kad jis gali būti (vos) 3, jau žinome iš pateikto pavyzdžio.

Atsakymas

Mažiausias zanavykiškasis gelgaudiškietiškai grakščios lentelės įvertis yra 3.